Les indispensables sur le logarithme népérien

Formules à connaître

Le domaine de définition

Ln(u) existe si et seulement si u > 0

Les limites

Celles de base

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty}$

Les croissances comparées

$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0}$

Le comportement à l'origine

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

La dérivée

$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$

Retenons ln 1 = 0 et ln x > 0 si x > 1

Les liens avec la fonction exponentielle

$\boxed{e^{\ln u} = u \text{ si u > 0 et } \ln e^u = u}$

Autrement dit , les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques
Leurs courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice .

Les formules pour calculer

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$\ln(a^n) = n \ln a$

Pense-bête

Eude de fonctions

- Ne pas confondre $\ln(x^2)$ et $\ln^2(x) = (\ln x)^2 = (\ln x)(\ln x)$
- La croissance comparée s'applique uniquement lorsqu'il y a une forme indéterminée !
  Il faut la même chose dans le logarithme et en dehors : (2x + 1) ln (2x + 1)

Equations

Avec des ln

$\ln x = 3$

On fait intervenir la fonction exponentielle : $e^{\ln x} = e^3$ soit x = e^3

Avec des inconnues en puissance

$0{,}2^n = 3$

$\ln(0{,}2^n) = \ln 3$

$n \ln(0{,}2) = \ln 3$

$n = \frac{\ln 3}{\ln 0{,}2}$

Les indispensables sur le logarithme népérien

Comment traiter un exercice

Les mêmes conseils que pour une étude de fonctions classiques
Attention à l'unité
Justifier les signes des dérivées proprement
Détailler les limites
Penser aux équations de tangentes , aux définitions d'asymptotes , au CTVI …
Toujours faire les tableaux de variations même si ce n'est pas demandé
Penser à bien regarder les questions précédentes …

Exemple

Lire cet énoncé en l'annotant

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère la fonction *f* , définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$[par : f(x) = $-3-\ln x+2(\ln x)^2$
On note (C) sa courbe représentative.
Partie A - Étude de la fonction *f* et tracé de la courbe (C)
1. a. Résoudre dans]0 ; $+\infty$ [l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser ln $x = X$). *(0,5 point)*
b. Résoudre dans]0 ; $+\infty$[l'inéquation $f(x) > 0$. *(0,5 point)*
2. a. Déterminer les limites de *f* en 0 et en + ∞ *(0,5 + 0,5 point)*
b. Calculer $f'(x)$. *(0,5 point)*
c. Étudier le sens de variation de *f* et dresser son tableau de variations. *(0,5 point)*

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$
(1 point)
4. On se propose d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
Pour cela, on considère la fonction *g* , définie sur]0 ; + ∞ [par : g(x) = $f(x)-\left(4e^{-\frac{5}{4}}x-\frac{41}{8}\right)$

a. Montrer que $g'(x)=\dfrac{4\ln x-1}{x}-4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer g''(x) *(1 + 0,5 point)*

b. Étudier le sens de variation de g' sur]0 ; $+\infty$ [. *(0,5 point)*
En déduire que, pour tout *x* appartenant à]0 ; $+\infty$ [, on a g'(x) ≤ 0 *(0,5 point)*
c. Calculer $g\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$ *(0,5 point)*
Pour tout *x* appartenant à]0 ; $+\infty$ [déterminer le signe de *g(x)*. *(0,5 point)*
En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T). *(0,5 point)*

Solution

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. On considère la fonction *f* , définie sur l'intervalle [0 ; $+\infty$[par : f(x) = $-3-\ln x+2(\ln x)^2$
On note (C) sa courbe représentative.
Partie A - Étude de la fonction *f* et tracé de la courbe (C)
1. a. Résoudre dans]0 ; $+\infty$ [l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser ln $x = X$). *on aura équation du second degré donc delta*
b. Résoudre dans]0 ; $+\infty$[l'inéquation $f(x) > 0$ signe de a en dehors des racines
2. a. Déterminer les limites de *f* en 0 et en + ∞ *en 0 : direct ; en + infini , FI donc factoriser par le plus haut degré et croissance comparée*

b. Calculer $f'(x)$. attention à u²
c. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations. Revérifier ma dérivée pour éviter les étourderies

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$
Y'=f '(a)(x - a)+f(a)
4. On se propose d'étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).
Pour l'instant , pas de question , je ne fais rien , je lis la suite

Pour cela, on considère la fonction g , définie sur]0 ; + ∞ [par : g(x) = $f(x)-\left(4e^{-\frac{5}{4}}x-\frac{41}{8}\right)$

a. Montrer que $g'(x)=\frac{4\ln x-1}{x}-4e^{-\frac{5}{4}}$ puis calculer g''(x) *formule u/v et* $\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$ est une constante donc sa dérivée est nulle

b. Étudier le sens de variation de g' sur]0 ; +∞ [. Signe de g''
En déduire que, pour tout x appartenant à]0 ; +∞ [, on a g'(x) ≤ 0 tableau de variations de g' et extremum
c. Calculer $g\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$ *vérification à la calculatrice*

Pour tout x appartenant à]0 ; +∞ [déterminer le signe de *g(x)*. *lecture du tableau de variations*
En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T). *C'est le signe de g qui donne la réponse car g = f – équation tangente*

A vous de jouer maintenant , faites l'exercice !