Limites dans la fonction logarithme népérien

Techniques de détermination de limites

Rappelons d'abord les deux formules de base : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty}$

Une valeur utile : $\boxed{\ln 1 = 0}$

Et les formules de croissance comparée : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0}$

- On peut se dire (mais pas l'écrire), en cas de forme indéterminée, ce sont les puissances de x qui l'emportent sur le ln

Exemple 1

Déterminer la limite de f(x) = $(\ln x)^2 - \ln x + 6$ en $+\infty$.

Un calcul direct donne une forme indéterminée . On va factoriser par la plus haute puissance de ln

On a f(x) = $\ln^2 x\left(1 - \dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{6}{\ln^2 x}\right)$.

On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6}{\ln^2 x} = 0$ ce qui donne $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{6}{\ln^2 x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2

Déterminer la limite de f(x) = $\dfrac{\ln^2 x + 3\ln x - 5}{x^3}$ en $+\infty$

Un calcul direct donne là encore une forme indéterminée . Transformons f .

On a : f(x) = $\dfrac{\ln^2 x}{x^3} + 3\dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{5}{x^3} = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 + 3\dfrac{\ln x}{x^3} - \dfrac{5}{x^3}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ par croissance comparée.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 = 0$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^3} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Toutes les techniques vues dans les chapitres précédents restent valables bien sûr : th des gendarmes, nombre dérivé … Et attention au domaine de définition sur lequel on travaille .

Exercices

Déterminer les limites des fonctions suivantes et en déduire d'éventuelles asymptotes

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \ln x$ en 0 et en $+\infty$
2) $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{\ln x - 1}$ en $+\infty$
3) $f(x) = x^2 + x - 4 - \ln x$ en $+\infty$
4) $f(x) = \dfrac{\ln x - 3x}{2x^3}$ en $+\infty$
5) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$
6) $f(x) = \ln(\ln x)$ en 1 et en $+\infty$
7) $f(x) = \ln(1 - 2x)$ en $\dfrac{1}{2}$ et en $-\infty$
8) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ en $+\infty$ et en $-\infty$
9) $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ en 0 et en $+\infty$
10) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-5}{x+2}\right)$ en – 2 et en $-\infty$