Le nombre d'or

Le but de ce problème est de définir le nombre d'or et d'envisager trois suites convergeant vers le nombre d'or.

A) Le nombre d'or

1) Résoudre dans R l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. La solution positive, notée φ , est appelée nombre d'or.
2) Démontrer les égalités : $\varphi^2 = \varphi + 1$; $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$; $\sqrt{1+\varphi} = \varphi$; et $\frac{\varphi^2+1}{2\varphi - 1} = \varphi$

B) La suite (a_n).

On pose $a_0 = 2$ et, pour tout $n \geq 0$, on a : $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $\frac{3}{2} \leq a_n \leq 2$.
3) Prouver que pour tout $n \geq 1$, on a : $|a_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|a_n - \varphi|$
4) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a : $|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} |a_1 - \varphi|$ puis que :

   $|a_n - \varphi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n}$
5) Prouver que (a_n) est convergente et déterminer sa limite .
6) Déterminer un entier n_1 tel que si $n \geq n_1$, alors : $|a_n - \varphi| \leq 10^{-6}$

C) La suite (b_n)

On pose $b_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n + 1}$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $\varphi \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 2$
2) En déduire que la suite (b_n) est convergente .
3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq b_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{3}(b_n - \varphi)$
4) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq b_n - \varphi \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Quelle est la limite de (b_n) ?
5) Déterminer un entier n_2 tel que si $n \geq n_2$, alors : $|b_n - \varphi| \leq 10^{-6}$

D) La suite (c_n) .

On pose $c_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, on a : $c_{n+1} = \frac{c_n{}^2 + 1}{2c_n - 1}$.

1) Calculer c_1 et c_2 .
2) a) On pose , pour tout $x > \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$. Vérifier que $f(\varphi) = \varphi$ et que $f'(\varphi) = 0$ puis étudier les variations de f .

   b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $\varphi \leq c_{n+1} \leq c_n \leq 2$

   c) Prouver alors que (c_n) est convergente .
3) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $c_{n+1} - \varphi \leq \frac{1}{2}(c_n - \varphi)^2$

4) En déduire que pour tout n ≥ 0, $0 \leq c_n - \mathrm{f} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+2^2+\ldots+2^n}$. Quelle est la limite de la suite (c_n) ?
5) Montrer que $c_8 = \mathrm{f}$ à 10^{-153} près.