Variations de la fonction logarithme népérien

Rappels des formules importantes

La dérivée de ln u est $\frac{u'}{u}$.

On a aussi besoin d'étudier le signe de la dérivée .
Les calculs avec le discriminant restent valables mais on aura aussi besoin d'utiliser les résolutions d'inéquations du premier degré avec des ln
On sait que ln x est une fonction croissante donc : a < b si et seulement si ln a < ln b .

- Attention à la rédaction dans ces résolutions :
  x > 3 équivaut à ln x > ln 3 car ln x est une fonction croissante

On rappelle aussi que ln x > 0 si x > 1 .
Et bien sûr : $e^{\ln x} = x$ si x > 0 et $\ln e^x = x$
Enfin , rappelons que ln x est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

Exercices

Exercice 1

Calculer les dérivées suivantes sur leur domaine de définition

1) $f(x) = x\ln x$
2) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
3) $f(x) = (\ln x)^4$
4) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$
5) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$
6) $f(x) = (x+1)(\ln x)^2$
7) $f(x) = \ln(x^3)$
8) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-9}\right)$
9) $f(x) = \ln\sqrt{3-x}$
10) $f(x) = \ln(\ln x)$

Exercice 2

Résoudre

1) $\ln x = 0$
2) $\ln x = -2$
3) $\ln(3-2x) = 1$
4) $\ln x = -\frac{2}{3}$
5) $\ln(x^2 - 4) < 0$
6) $\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - 3 < 0$
7) $\ln x - 2 \geq 0$
8) $\ln(3x-1) = \ln(5x-2)$
9) $\ln(3x+2) \leq \ln(x-5)$
10) $\ln(x^2 - 16) \geq \ln 2x$
11) $(2x-3)\ln(x+1) > 0$
12) $\ln(\ln x) > 0$

Exercice 3

Résoudre

1) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 = 0$
2) $(\ln x)^2 - \ln x - 30 = 0$
3) $(\ln x)^2 + 3\ln\frac{1}{x} - 10 = 0$
4) $2(\ln x)^3 - 9\ln^2 x - 6\ln x + 5 = 0$
5) $2\ln^2 x - 3\ln x - 5 \leq 0$
6) $2\ln^2 x + \ln x - 6 > 0$
7) $\ln^2 x - 5\ln x \geq 0$
8) $7\ln^3 x + 8\ln^2 x + 9\ln x \geq 0$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par f(x) = $\ln(e^{2x} - e^{x} + 1)$ de courbe représentative C

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Etudier les variations de f
3) Démontrer que la droite d d'équation y = 2 x est asymptote à C et étudier leur position relative.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par f(x) = $\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$ sur] – 3 ; 3 [

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Etudier les variations de f
3) Montrer que l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe de f

Exercice 6

Soit la fonction f définie par f(x) = $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$ sur $]0;+\infty[$

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Etudier les variations de f

Exercice 7

Soit la fonction f définie par f(x) = $x - 1 + \dfrac{\ln x}{2}$ sur $]0;+\infty[$

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
2) Etudier les variations de f
3) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution a sur $]0;+\infty[$; en donner un encadrement à 10^{-2} près .

Exercice 8

Soit la fonction f définie par f(0) = 1 et f(x) = $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ si x > 0 .

1) Montrer que f est continue en 0
2) En montrant que $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3}$, en déduire la dérivabilité de f en 0.

Exercice 9

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses

1) La fonction f(x) = e^x est la seule solution de l'équation différentielle y' = y
2) La fonction f(x) = 5 e^x est une solution de l'équation y' = y
3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = 0$
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^4} = 0$
5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1-e^{2x}} = 1$
6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-e^{2x}} = 0$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{5x} = \dfrac{5}{2}$
8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}-1}{5x} = 0$
9) L'équation $e^{2x} + 1 = 0$ n'a pas de solution
10) L'équation $e^{2x} - 4 = 0$ a pour solution ln 2

Variations de la fonction logarithme népérien

11) $e^{2a-1} > e^{2b-1}$ équivaut à a > b
12) ln(e^{2x-1}) est définie sur $\mathbb{R}$
13) La dérivée de $4e^{-2x+5}$ est $-2e^{-2x+5}$
14) La dérivée de $(e^x)^2$ est $2xe^x$

15) L'ensemble de définition de $\dfrac{1}{1-e^{2x}}$ est $\mathbb{R}^*$.
16) Les fonctions $e^{\ln(2x-4)}$ et ln (2x – 4) ont même ensemble de définition