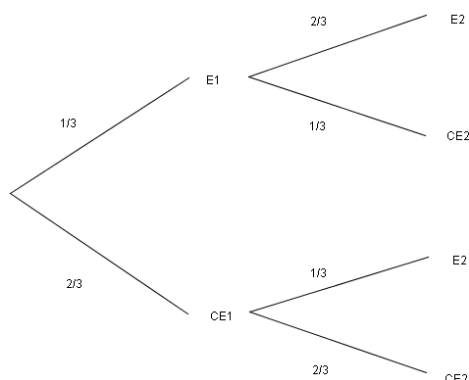




- 1) Puisqu'il y a un jeton blanc et deux jetons noirs dans le premier sac, on a : $p(E_1) = 1/3$. Quand on a pris un jeton blanc dans le premier sac et qu'on le remet dans le deuxième, on a alors deux blancs et un noir d'où la probabilité d'avoir le blanc $2/3$ et d'avoir le noir $1/3$. Raisonnement identique mais avec les noirs pour la deuxième partie de l'arbre.

- 2) a) En lisant l'arbre et avec les

explications précédentes : $p(E_1) = \frac{1}{3}$

$$, p_{E_1}(E_2) = \frac{2}{3} \text{ et } p_{\overline{E_1}}(E_2) = \frac{1}{3}$$

- b) Par la formule des probabilités totales

$$p(E_2) = p(E_1 \cap E_2) + p(\overline{E_1} \cap E_2) = p_{E_1}(E_2)p(E_1) + p_{\overline{E_1}}(E_2)p(\overline{E_1}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

- c) Puisque chaque sac a au départ 1 jeton blanc et 1 jeton noir, lorsqu'on en ajoute un

, il y en a trois au total : si c'est un blanc, alors $p_{E_k}(E_{k+1}) = \frac{2}{3}$ et si c'est un noir,

$p_{\overline{E_k}}(E_{k+1}) = \frac{1}{3}$. Par la formule des probabilités totales :

$$p(E_{k+1}) = p(E_k \cap E_{k+1}) + p(\overline{E_k} \cap E_{k+1}) = p_{E_k}(E_{k+1})p(E_k) + p_{\overline{E_k}}(E_{k+1})p(\overline{E_k})$$

$$p_{k+1} = \frac{2}{3}p_k + \frac{1}{3}(1 - p_k) = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

- 3) $v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(u_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}v_k$ donc la suite v est géométrique de raison $1/3$

On a donc $v_k = v_1\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ et $u_k = v_k + \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}$. Or puisque

$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ on a : $\lim_{k \rightarrow +\infty} -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 0$ et donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \frac{1}{2}$ et la suite u est bien convergente puisque sa limite est finie.

- 4) On a $p_k = u_k$, on doit donc résoudre : $0,4999 \leq -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} \leq 0,5$ qui est équivalente aux lignes suivantes :

$$-0,0001 \leq -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \leq 0$$

$$6 \times 10^{-4} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$\ln(6 \times 10^{-4}) \geq (k-1)\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$k-1 \geq \frac{\ln(6 \times 10^{-4})}{-\ln 3}$$

$$k \geq 7,75 \quad \text{donc } k = 8, 9 \text{ ou } 10$$