Probabilités conditionnelles

Rappels du vocabulaire et des formules indispensables de première

Une expérience aléatoire est une expérience dont on peut prévoir quels sont les résultats possibles, appelés éventualités, mais dont on ignore lequel sera réalisé avant que l'expérience n'ait eu lieu.
L'univers associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les éventualités.
Un événement est une partie de l'univers
Lorsque tous les événements ont la même chance de se réaliser, on dit qu'ils sont équiprobables.

Soit p une probabilité :

$0 \leq p \leq 1$

$p(\varnothing) = 0$ et p(E) = 1

$p(A) = 1 - p(\overline{A})$ où $\overline{A}$ est l'événement contraire de A

La somme des probabilités des événements partitionnant un univers est égale à 1

$p(A) = \dfrac{nombre.de.cas.favorables.à.la.réalisation.de.A}{nombre.de.cas.possibles}$ dans des cas d'équiprobabilité

Soient A et B deux événements :
A et B sont incompatibles si et seulement si : $A \cap B = \varnothing$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

On appelle variable aléatoire sur l'univers E une fonction définie sur E.
Soit X variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, …, x_n et p_i les probabilités associées

L'espérance est donnée par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

La variance est donnée par : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p_i - (E(X))^2$

L'écart-type est donné par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- Lorsqu'on demande la loi de probabilité d'une variable aléatoire, présenter les résultats dans un tableau mais détailler sur la copie les calculs qui ont permis de le compléter

Exemple

Un jeu consiste à lancer deux dés parfaitement équilibrés. Un joueur mise 1 euro sur le numéro 5. Si ce numéro est obtenu sur chacun des deux dés, le joueur reçoit 4 euros
S'il apparaît sur un seul des deux dés, il reçoit 3 euros
Dans tous les autres cas, il ne reçoit rien
Soit X la variable aléatoire égale à la somme reçue par le joueur diminuée de sa mise
Déterminer la loi de probabilité de X, calculer E(X) ; que peut-on en déduire ?

Solution

Commençons par déterminer les valeurs possibles de X : il peut gagner 4, 3 ou 0 euros mais il a donné 1 euro donc X = 3 ou X = 2 ou X = - 1

Ensuite déterminons les probabilités correspondantes :

Les tirages possibles peuvent être schématisés par des couples, le premier chiffre étant la valeur du premier dé, et le deuxième chiffre, la valeur du deuxième dé.

En les écrivant tous, on en trouve 36 :

Pour avoir 5 sur les deux dés, c'est le couple (5 ; 5) donc p(X = 3) = $\frac{1}{36}$

Pour avoir 5 sur un seul dé : (5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,6) (1,5) (2,5) (3,5) (4,5) (6,5) donc p(X=2) = $\frac{5}{6}$

Et enfin, le reste : p(X = - 1) = $\frac{25}{36}$

D'où la loi de probabilité suivante :

x_i	3	2	- 1
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{36}$

Calculons l'espérance :

E(X) = $3\times\frac{1}{36}+2\times\frac{5}{6}-1\times\frac{25}{36}=\frac{19}{18}\cong 1{,}05$ euros

Concrètement, le joueur peut espérer repartir avec 1,05 €.

Les probabilités conditionnelles

La formule à connaître dans tous les sens : $p_B(A)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$: probabilité de A sachant B

Dans le cas où : $A=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)$ on a : $p(A)=p(A\cap B)+p\left(A\cap\overline{B}\right)$; c'est la formule des probabilités totales.

- Un arbre de probabilités est toujours pratique dans les probabilités conditionnelles mais il faut bien lire l'énoncé avant de le réaliser
- Même si on utilise l'arbre pour le raisonnement, toujours écrire clairement les formules littérales sur la copie.

Bien souvent, la difficulté est dans la compréhension de la différence entre « sachant » et « et »

Un petit exemple pour mieux comprendre la nuance dans la langue française :

Dans une librairie, on propose un livre au prix de 25 euros et si vous achetez ce livre, vous pouvez profiter d'une promotion sur un exemplaire du discours de la méthode de Descartes au prix de 10 euros.

Le prix du livre de Descartes **sachant** qu'on a acheté l'autre livre est 10 euros

Le prix du livre de Descartes **et** de l'autre livre est 35 euros.

Probabilités conditionnelles

Exemple

On dispose de trois urnes U1, U2 et U3 contenant respectivement 3 boules rouges et 2 boules noires, 2 rouges et 2 noires et enfin 1 rouge et 4 noires. Julien lance un dé bien équilibré.
S'il obtient 1, il extrait au hasard une boule de l'urne 1
S'il obtient 3 ou 5, il extrait au hasard une boule de l'urne 2
S'il obtient 2, 4 ou 6, il extrait au hasard une boule de l'urne 3
Quelle est la probabilité que la boule extraite soit rouge ?

Solution

Nous allons faire un arbre de probabilités : le premier événement, c'est le lancer du dé, le deuxième c'est l'extraction de la boule.

P (prendre dans U1) = p (1 sur le dé) = $\frac{1}{6}$

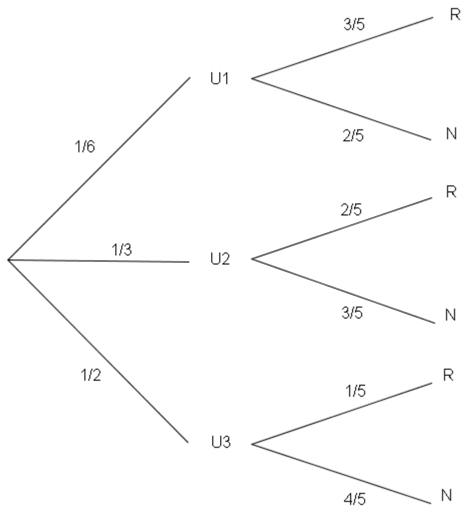
P (prendre dans U2) = p (3 ou 5) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P (prendre dans U3) = p (2, 4 ou 6) = $\frac{1}{2}$

Ensuite, quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge si on prend dans l'urne 1 :

$$\frac{3 boulesrouges}{5 boules} = \frac{3}{5}$$

On complète ainsi l'arbre de probabilités suivant :



Maintenant, on cherche dans quels cas on obtient une boule rouge.
Il y a trois cas : en passant par chaque urne
On a donc par la formule des probabilités totales :

P(R) = $p(U_1 \cap R) + p(U_2 \cap R) + p(U_3 \cap R)$

Or $p(U_1 \cap R) = p_{U_1}(R) \times p(U_1)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

De même, $p(U_2 \cap R) = \frac{2}{15}$ et $p(U_3 \cap R) = \frac{1}{10}$

Donc p(R) = $\frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{3}$

Vocabulaire

« Au moins 3 » signifie : 3 ou plus
« Au plus 3 » signifie : 3 ou moins

Probabilités conditionnelles

Exercices

Exercice 1

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes : c'est un trèfle. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un roi ?

Exercice 2 (bac)

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes ont montré que s'il arrête le premier tir, la probabilité pour qu'il arrête le deuxième est 0,8. S'il a laissé passer le premier tir, la probabilité pour qu'il arrête le deuxième est 0,6. La probabilité qu'il arrête le premier tir est 0,7.

1) Quelle est la probabilité qu'il arrête les deux tirs ?
2) Quelle est la probabilité qu'il n'arrête aucun tir ?
3) Quelle est la probabilité qu'il arrête le deuxième tir ?
4) Quelle est la probabilité qu'il ait arrêté le premier tir sachant qu'il a arrêté le deuxième ?

Exercice 3 (bac)

Voici le tableau de répartition des principaux groupes sanguins des habitants de la France (donnés en pourcentage)

	O	A	B	AB
Rhésus +	35	38,1	6,2	2,8
Rhésus -	9	7,2	1,2	0,5

1) Calculer $p_+(O)$
2) Dessiner un arbre de probabilités dont le premier événement est le rhésus
3) Déterminer p(O)
4) Quelle est la probabilité qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

Exercice 4 (bac)

Un artisan est contacté à domicile par ses clients sur appel téléphonique et dispose d'un répondeur
Quand l'artisan est absent, il branche systématiquement son répondeur
Quand il est présent, il le branche une fois sur trois
Quand un client téléphone, il a une chance sur cinq d'obtenir l'artisan et quatre chances sur cinq d'obtenir le répondeur
Un client téléphone à l'artisan
On note R l'événement : le client obtient le répondeur et A l'événement : l'artisan est absent

1) Déterminer p(R) en fonction de p(A)
2) En déduire p(A)
3) Un client téléphone ; il obtient le répondeur. Déterminer la probabilité que l'artisan soit présent.