Corrigé raisonnement par récurrence

Exercice 1

1) $u_n = 14 + n$ devient : $u_{n+1} = 14 + (n+1) = 15 + n$
2) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ devient :

   $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$
3) $1 < u_n < 5$ devient : $1 < u_{n+1} < 5$
4) $4^n + 3$ multiple de 3 devient : $4^{n+1} + 3$ multiple de 3
5) $2^n > (n+2)^2$ devient : $2^{n+1} > (n+1+2)^2$ c'est-à-dire $2^{n+1} > (n+3)^2$
6) $10^{n+1} - 1$ divisible par 9 devient $10^{n+2} - 1$ divisible par 9

Exercice 2

1) $6 < a + 5 < 10$
2) 1 < a < 5 donc 12 < 2a + 10 < 20 et $2\sqrt{3} < \sqrt{2a+10} < 2\sqrt{5}$
3) 1 < a < 5 donc 3 < a + 2 < 7 et 1 < 3a – 2 < 13 ce qui donne $\dfrac{1}{13} < \dfrac{1}{3a-2} < 1$.

   Conclusion : $\dfrac{3}{13} < \dfrac{a+2}{3a-2} < 7$
4) 1 < a < 5 donc 4 < a + 3 < 8 et $\dfrac{1}{8} < \dfrac{1}{a+3} < \dfrac{1}{4}$ d'où : $-\dfrac{1}{4} < -\dfrac{1}{a+3} < -\dfrac{1}{8}$

Exercice 3

1) $1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   - Pour n = 1 : $1\times 2 = 2$ et $\dfrac{1(2)(3)}{3} = 2$ donc l'égalité est vraie pour n = 1.
   - (HR) : supposons que $1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ au rang n.

     On va montrer que cette égalité est vraie au rang n + 1 :

$1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$ par (HR)

$1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{3}[n+3] = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

On a bien l'égalité au rang n + 1

   - L'égalité $1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ est donc vraie pour tout n > 0

2) $10^n - 1$ divisible par 9 pour n > 0
   - Pour n = 1 : 10 – 1 = 9 est bien divisible par 9
   - (HR) : supposons que $10^n - 1$ est divisible par 9 au rang n et montrons que $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9

   Par l'hypothèse de récurrence $10^n - 1 =$ 9k avec k entier relatif

   10 (10^n – 1) = 90 k et $10^{n+1} - 1 = 10(10^n - 1) + 9 = 90k + 9 = 9(10k+1)$ avec

   10 k + 1 entier relatif donc $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9

- On a bien $10^n - 1$ divisible par 9 pour tout n > 0

3) $2n+1 < 2^n$ pour n > 5
   - Pour n = 6 : 2(6) + 1 = 13 et 2^6 = 64 et 13 < 64 donc vrai
   - (HR) : supposons que $2n+1 < 2^n$ au rang n et montrons que $2n+3 < 2^{n+1}$

   $2n+1 < 2^n$ par (HR) , ajoutons 2 aux deux membres de l'inégalité

   $2n+3 < 2^n + 2$

   Or n > 5 , donc 2 < 2^n et on a donc $2n+3 < 2^n + 2$ < $2^n + 2^n$

   ce qui donne $2n+3 < 2^n(2) = 2^{n+1}$
   - On en conclut donc que $2n+1 < 2^n$ pour tout n > 5

4) $2^n > (n+2)^2$ pour n > 8
   - Pour n = 9 : 2^9 = 512 et (9 + 2)² = 121 donc on a bien 512 > 121
   - (HR) : supposons que $2^n > (n+2)^2$ au rang n et montrons que $2^{n+1} > (n+3)^2$

   On a : $2^n > (n+2)^2$ par (HR) , multiplions par 2

   $2^{n+1} > 2(n+2)^2$

   On veut donc montrer : 2(n + 2)² > (n + 3)² équivalent aux lignes suivantes :
   2(n² + 4n + 4)> n² + 6 n + 9
   n² +2n – 1 > 0
   or n > 8 donc n² + 2n – 1 > 0 et donc 2^{n+1} > 2(n + 2)² > (n + 3)²
   - On en conclut donc que $2^n > (n+2)^2$ pour tout n > 8

Exercice 4

Au rang n = 0 : u_0 = 1 vrai
(HR) : supposons u_n = 1 au rang n et montrons que u_{n+1} = 1
$u_{n+1} = 4u_n - 3$ = 4 (1) – 3 = 1 par définition de la suite et par (HR)
Donc la suite (u_n) est constante égale à 1

Exercice 5

$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$.
Pour n = 0 : $3 - 2^0 = 2 = u_0$ donc vrai au rang n = 0
(HR) : supposons que $u_n = 3 - 2^n$ au rang n et montrons que $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$
Par définition : $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$
$= 2(3 - 2^n) - 3$ par (HR)
$= 3 - 2\,(2^n)$
$= 3 - 2^{n+1}$
On en conclut donc que $u_n = 3 - 2^n$ pour tout n

Exercice 6

$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ pour tout n

Pour n = 0 : $2^0 = 1$ et $2^1 - 1 = 1$ donc vrai

(HR) : supposons que $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ et montrons que $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$

On a : $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$

On a donc bien $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$ pour tout n

Exercice 7

Pour tout n > 3 , montrer que $2^n \geq n^2$
Pour n = 4 : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$; 16 = 16 donc vrai
(HR) : supposons que $2^n \geq n^2$ au rang n et montrons $2^{n+1} \geq (n+1)^2$
$2^n \geq n^2$, multiplions par 2
$2^{n+1} \geq 2n^2$
Montrons que : $2n^2 > (n+1)^2$ cette inégalité équivalente à
$n^2 - 2n - 1 > 0$, or n > 3 donc cette inégalité est vraie
On a donc bien $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$
On peut donc conclure que pour tout n > 3 , $2^n \geq n^2$

Exercice 8

$1 - 3 + 5 - 7 + ... + (2n-1)(-1)^{n-1} = n(-1)^{n-1}$
Pour n = 1 : $1 = 1(-1)^0 = 1$ vrai
(HR) : supposons $1 - 3 + 5 - 7 + ... + (2n-1)(-1)^{n-1} = n(-1)^{n-1}$ au rang n et montrons que
$1 - 3 + 5 - 7 + ... + (2n+1)(-1)^n = (n+1)(-1)^n$
On a : $1 - 3 + 5 - 7 + ... + (2n+1)(-1)^n = 1 - 3 + ... + (2n-1)(-1)^{n-1} + (2n+1)(-1)^n$
$= n(-1)^{n-1} + (2n+1)(-1)^n = (-1)^{n-1}(n - 2n - 1) = (-1)^{n-1}(-n-1) = (-1)^n(n+1)$
On peut donc conclure que l'égalité est vraie pour tout n > 0

Exercice 9

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Pour n = 1 : $1^3 = 1^2$ vrai
(HR) : supposons $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$ au rang n et montrons $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3$$

Maintenant , développons $\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + 2(n+1)\frac{(1+n)n}{2} + (n+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^2(n+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3$$

L'égalité est donc vraie pour tout n > 0

Exercice 10

Pour n = 0 , 0 est bien un multiple de 3
(HR) :supposons $n^3 - n = 3k$ avec k entier relatif et montrons que $(n+1)^3 - (n+1)$ multiple de 3
On a : $(n+1)^3 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3k + 3(n^2 + n) = 3(k + n^2 + n)$ avec $k + n^2 + n$ entier relatif donc $(n+1)^3 - (n+1)$ multiple de 3 .

On a bien $n^3 - n$ multiple de 3 pour tout n

Exercice 11

Pour n = 0 , vrai car 0 multiple de 5
(HR) supposons que $n^5 - n = 5k$ avec k entier relatif
$(n + 1)^5 - n - 1 = n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n = 5(k + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ multiple de 5
On en conclut que $n^5 - n$ est un multiple de 5 pour tout n

Exercice 12

Puisqu'on demande une conjecture , testons l'expression pour quelques valeurs de n et essayons de trouver un point commun aux résultats
n = 0 : $5^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0$
n = 1 : $5 - 2 = 3$
n = 2 : $25 - 4 = 21$
n = 3 : $125 - 8 = 117$
Tous les résultats son des multiples de 3
On va montrer par récurrence que $5^n - 2^n$ est un multiple de 3 pour tout n entier naturel
Les calculs précédents montrent que la proposition est vraie pour n = 0
(HR) supposons $5^n - 2^n = 3k$ avec k entier relatif
Alors :

$$5^{n+1} - 2^{n+1} = 5\times5^n - 2\times2^n = (3+2)\times5^n - 2\times2^n = 3\times5^n + 2(5^n - 2^n) = 3\times5^n + 6k = 3(5^n + 2k)$$

qui est bien un multiple de 3
Donc $5^n - 2^n$ est un multiple de 3 pour tout n entier naturel