Raisonnement par récurrence

Le principe des dominos

Supposons une ligne infinie de dominos . On vérifie deux choses :
La première est « le premier domino tombe » (1)
La deuxième est « si un domino tombe , il entraine le suivant qui tombe également » (2)
Alors , on peut être sur que le phénomène suivant va se produire sous vos yeux : tous les dominons tombent ! (c'est la conclusion)

- C'est exactement ce principe qui est à la base du raisonnement par récurrence .

Rédaction du raisonnement par récurrence

C'est souvent assez délicat au départ , mais avec de l'entrainement , c'est plus facile . Alors , courage !

On commence par vérifier que la propriété est vraie pour le premier rang (0 ou 1 ou plus : il faut bien lire l'énoncé) (1)
Puis on suppose que la propriété est vraie au rang n (c'est l'hypothèse de récurrence) et on montre qu'elle est vraie au rang n + 1 (c'est l'hérédité) (2)
Enfin , on n'oublie pas la phrase de conclusion .

Remarque : ne pas hésiter à dire clairement ce que l'on fait ! Ne pas hésiter à noter au brouillon la propriété au rang n +1 pour voir le but à atteindre

- Dans l'énoncé , l'indication est souvent donnée « démontrer par récurrence » mais quand rien n'est précisé , il faut aussi y penser après avoir vérifié qu'une autre méthode n'est pas plus appropriée

Exemple rédigé

Montrer par récurrence que pour $n > 9$: $2^n > 100\,n$

Au brouillon

L'énoncé donne $n > 9$: le premier rang est 10

La formule à démontrer est $2^n > 100\,n$, c'est donc cette inégalité qui est l'hypothèse de récurrence , qui au rang n + 1 devient : $2^{n+1} > 100\,(n+1)$ ou encore $2^{n+1} > 100\,n + 100$.
Comment peut-on passer de 2^n à 2^{n+1} : en multipliant par 2

Que se passe t-il si on multiplie l'hypothèse de récurrence par 2 : $2\,(2^n) = 2^{n+1}$. Ce côté-là s'arrange bien
$2\,(100\,n) = 200\,n = 100\,n + 100\,n$. On doit avoir $100\,n + 100\,n > 100\,n + 100$ c'est-à-dire $100\,n > 100$ donc $n > 1$. Or $n > 9$ donc ça marche !

Raisonnement par récurrence

Sur la copie

- Vérifions que la propriété est vraie pour n = 10 : $2^{10} = 1024$ et $10(100) = 1000$; on a bien $1024 > 1000$.
- Supposons que la propriété $2^n > 100\,n$ est vraie pour le rang n (HR)
  Nous allons prouver que cette propriété est vraie au rang n +1 c'est-à-dire que $2^{n+1} > 100\,n + 100$.
  On a (HR) : $2^n > 100\,n$
  Multiplions cette inégalité par 2 : $2^{n+1} > 200\,n$
  On peut aussi l'écrire : $2^{n+1} > 100\,n + 100\,n$
  Or $n > 9$, donc : $2^{n+1} > 100\,n + 900 > 100\,n + 100$
  La propriété est donc vraie au rang n + 1
- On peut donc conclure que $2^n > 100\,n$ est vraie pour tout $n > 9$

Attention à la nuance « pour le rang n » dans l'hypothèse de récurrence et « pour tout n » dans la conclusion

Pour le rang n : ce n'est valable que pour un seul n choisi arbitrairement
Pour tout n : c'est valable pour n'importe quel n , pour tous les n .

Pour d'autres modèles de rédaction , ne pas hésiter à feuilleter des manuels de maths ; on peut choisir son propre style mais il faut toujours bien mettre en évidence les trois étapes .

Exercices

Exercice 1

Ecrire les propositions suivantes au rang n + 1

1) $u_n = 14 + n$
2) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3) $1 < u_n < 5$
4) $4^n + 3$ multiple de 3
5) $2^n > (n+2)^2$
6) $10^{n+1} - 1$ divisible par 9

Exercice 2

On suppose que $1 < a < 5$. Encadrer les expressions suivantes :

1) $a + 5$
2) $\sqrt{2a+10}$
3) $\dfrac{a+2}{3a-2}$
4) $-\dfrac{1}{a+3}$

Exercice 3

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1) $1\times 2 + 2\times 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ pour tout $n > 0$
2) $10^n - 1$ divisible par 9 pour tout $n > 0$

3) $2n+1 < 2^n$ pour n > 5
4) $2^n > (n+2)^2$ pour n > 8

Exercice 4 (2 mn)
Montrer que la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 4\, u_n - 3$ est constante égale à 1

Exercice 5 (2 mn)
Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2\, u_n - 3$.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 3 - 2^n$

Exercice 6 (2 mn)
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

Exercice 7 (10 mn)
Pour tout n > 3 , montrer que $2^n \geq n^2$

Exercice 8 (2 mn)
Pour tout entier naturel n ≥ 1 , montrer que : $1 - 3 + 5 - 7 + ... + (2n-1)(-1)^{n-1} = n(-1)^{n-1}$

Exercice 9 (10 mn)
Pour tout entier n ≥ 1 , montrer : $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$

Exercice 10 (5 mn)
Montrer que pour tout entier n ≥ 0 , $n^3 - n$ est un multiple de 3

Exercice 11 (5 mn)
Montrer que pour tout entier n ≥ 0 , $n^5 - n$ est un multiple de 5

Exercice 12
Quelle conjecture peut-on faire sur $5^n - 2^n$ pour tout entier n ≥ 1 ? La démontrer .