PGCD

Comment déterminer le PGCD de deux nombres donnés

Le plus simple , calculatrice ! La plupart donne directement le PGCD .
Sinon , on utilise l'algorithme d'Euclide (que nous avons revu) et le PGCD est le dernier reste non nul .

Exemple

PGCD(589 ; 64)

$$589 = 64 \times 9 + 13$$
$$64 = 4 \times 13 + 12$$
$$13 = 12 + 1$$
$$12 = 1 \times 12 + 0$$

Le dernier reste non nul est donc 1 et PGCD(589 ;64) = 1

Comment déterminer le PGCD de deux expressions en n

Quelques rappels pas inutiles :

- Le PGCD doit diviser les deux expressions (et oui !)
- Le PGCD divise toute combinaison linéaire des deux expressions : si d est le PGCD de A et B alors d divise 3A – 5B ; A + B ; A – B …

Principe :

On commence par combinaison linéaire à trouver quels nombres le PGCD peut diviser . Puis on fait le tri !

Exemple 1

Déterminer en fonction de n le PGCD de n + 4 et de 3n + 7

Par combinaison linéaire , on élimine les n : $3(n+4) - 3n - 7 = 5$
Soit d = PGCD(n+4 ;3n+7) alors d divise 5 donc d = 1 ou d = 5
On a donc deux possibilités ; il faut donc soit garder les deux mais en fonction des valeurs de n , soit en supprimer une .
On teste alors les valeurs obtenues et on regarde si on obtient une valeur de n ou une contradiction .
Si d = 5 alors 5 divise n + 4 et 5 divise 3n + 7 . Raisonnons modulo 5 :

N	0	1	2	3	4
N + 4	4	0	1	2	3
3N + 7	4	0	3	6	4

Le seul cas possible est donc n = 1 + 5k
Conclusion ; si n = 1 + 5k , alors PGCD(n+4 ;3n+7) = 5 , sinon PGCD(n+4 ;3n+7) = 1

Exemple 2

Déterminer en fonction de n le PGCD de 5n + 7 et 3 n – 4

Essayons par combinaison linéaire d'éliminer les « n »

$$3(5n+7)-5(3n-4)=41$$

Rédigeons : doit d = PGCD(5n+7 ; 3n – 4) . Alors d divise $3(5n+7)-5(3n-4)=41$.

Or 41 est un nombre premier (si vous ne me croyez pas , essayez de diviser par 2 , 3 , 5 car $\sqrt{41}<7$) donc d = 1 ou d = 41 .

On a donc deux possibilités ; il faut donc soit garder les deux mais en fonction des valeurs de n , soit en supprimer une .

On teste alors les valeurs obtenues et on regarde si on obtient une valeur de n ou une contradiction .

Si d = 41 alors (d divise les deux expressions) donc il existe k tel que 3n – 4 = 41k donc on retombe sur une équation diophantienne : 3n – 41 k = 4 . On la résout . Je vous passe les détails , en cas de difficulté , voir la fiche sur les équations diophantiennes et on trouve : il faut que n soit de la forme 56 + 41 r .

(on aurait aussi pu utiliser les congruences modulo 41 mais c'est un peu long !)

Conclusion : si n = 56 + 41 r , alors PGCD(5n + 7 ; 3n – 4) = 41 ; sinon , PGCD = 1

Remarques :

- Le tri peut être beaucoup plus rapide . Par exemple vous avez le choix entre d = 1 et d = 2 et vos deux expressions sont impaires : 2 est donc exclu et PGCD = 1 .
- Evidemment , si vous avez trouvé que d est un diviseur de 60 , bon courage pour le tri !
- En général , la situation s'arrange et si cette méthode ne fonctionne pas , on vous a mis sur la voie d'une autre par des questions précédentes .