Comment traiter un exercice d'arithmétique ?

Première étape

Lire l'exercice en entier une ou deux fois en se demandant à quel thème du chapitre on se rattache : congruences , numérations , division euclidienne …

Soit le thème apparait clairement : il y a des questions avec les mots congruences , ou les symboles congruences , ou on demande un reste , ou on parle d'écriture en base … et il est facile de savoir dans quel registre on se situe

Soit l'énoncé est plus diffus et on ne voit pas tout de suite ce qu'on va utiliser . Dans ce cas , relire une troisième fois en s'attachant à tous les détails (on parle de chiffre des unités : bases ou congruences ; durée entre deux dates : congruences ; on code des messages : congruences)

Deuxième étape

Surligner les mots qui vous indiquent des méthodes (en utilisant des congruences , en raisonnant par récurrence , en utilisant , en déduire …) et ceux qui donnent des conditions (en deux couleurs différentes)

Si vous êtes en congruences , repérez modulo combien et notez le sur l'énoncé

Si vous êtes en numération , repérez la base et notez le sur l'énoncé

Repérez aussi la présence de suites , de sommes … Est-ce que ce sont des suites géométriques ? (par exemple des sommes de puissances) . Quelle raison ? Notez la formule de la somme de peur de l'oublier dans le feu de l'exercice avec le stress

Troisième étape

Maintenant on prend les questions une par une . Lisez bien la question en entier avant de vous lancer . (si vous avez 1) a) b) c) , on lit d'abord une fois a) b) et c) pour voir l'articulation) .

Prenez la toute première question (1)a)) : que va-t-on utiliser ? que vous demande t'on ?

N'oubliez pas que les questions suivantes peuvent utiliser les questions précédentes .

Quatrième étape

La rédaction doit être claire , pour vous et pour le correcteur .

N'hésitez pas à souligner vos résultats car ainsi quand vous cherchez des indications , les résultats précédents vous sautent aux yeux .

Il peut être judicieux de noter au brouillon les résultats trouvés ou admis au fur et à mesure de leur apparition . Dans ce cas , réservez une feuille de brouillon à ce seul usage .

Exemple

Soit p un nombre premier impair . On souhaite démontrer qu'une condition nécessaire pour que p soit égal à la somme de deux carrés est que le reste de p par la division euclidienne par 4 soit égal à 1 .

1) Soit x un entier naturel , déterminer les restes possibles par la division euclidienne de x^2 par 4
2) Supposons qu'il existe deux entiers x et y tels que $p = x^2 + y^2$, justifier que si x et y ont même parité , alors p est pair . Que peut-on en déduire ?
3) Conclure

Comment traiter un exercice d'arithmétique ?

- Etape 1: à la première lecture , division euclidienne , parité donc congruences possibles
- Etape 2 :

Soit p un nombre premier impair . On souhaite démontrer qu'une condition nécessaire pour que p soit égal à la somme de deux carrés est que le reste de p par la division euclidienne par 4 soit égal à 1 .

1) Soit x un entier naturel , déterminer les restes possibles par la division euclidienne de x² par 4

On va travailler modulo 4

2) Supposons qu'il existe deux entiers x et y tels que p = x² + y² , justifier que si x et y ont même parité , alors p est pair . *on peut travailler modulo 2* Que peut-on en déduire ? *il faudra utiliser ce qui vient d'être fait*
3) Conclure *on doit donner une réponse au problème posé : je repasse la question en couleur (rouge)*

- Etape 3 : on reprend la question 1

On a noté travailler modulo 4 donc on fait une table de congruence ; on demande un reste donc les calculs avec les résultats positifs .

X	0	1	2	3
X²	0	1	0	1

La question 1 est finie ; on note au brouillon que les restes sont 0 ou 1 . On en profite pour remarquer qu'un nombre pair donne 0 et un nombre impair donne 1 . On ne sait pas si ça va servir , alors on se contente de le griffonner au brouillon .

On passe à la question 2
On commence par remarquer qu'il y a deux parties (il ne faut donc pas en oublier une)
On a noté travailler modulo 2 , c'est ce qu'on va donc faire
On dit x et y même parité donc tous les deux pairs ou tous les deux impairs.
On a x et y pairs : $x \equiv y \equiv 0[2]\ donc\ x^2 \equiv y^2 \equiv 0[2]$ donc $x^2 + y^2 \equiv 0[2]$ donc x²+y² pair
On a x et y impairs : $x \equiv y \equiv 1[2]\ donc\ x^2 \equiv y^2 \equiv [2]\ donc\ x^2 + y^2 \equiv 2 \equiv 0[2]$ donc x²+y² pair . On note au brouillon : x et y même parité alors x²+y pair
Que peut-on en déduire ? Bonne question ! On relit l'énoncé puisqu'il doit y avoir un lien entre tout ce qu'on fait .
On a surligné en vert que p est impair ; or on vient de dire que p est pair si x et y ont même parité donc il y aune contradiction . Puisque p impair (ça , on ne peut pas le changer , c'est l'énoncé) , ça veut dire que x et y sont de parité différente : l'un est pair , l'autre impair . On note au brouillon : x pair , y impair . (ils ont un rôle symétrique)

On passe à la question 3
On veut donc donner une réponse au problème posé (en rouge) . Il faut évidemment arriver à la même conclusion que celle demandée mais on ne peut pas se contenter de la recopier : l'examinateur pourrait penser qu'on bluffe .
On relit son brouillon : modulo 4 , le carré d'un pair est 0 , le carré d'un impair est 1 , x est pair , y impair . Donc x² a un reste modulo 4 égal à 0 et y² a un reste égal à 1 . La somme de 1 et 0 ça fait 1 !
Il reste donc à rédiger .

On veut que p soit la somme de deux carrés : par la question 2) , on a vu qu'alors x doit être pair et y impair .
La question 1 nous a montré que le reste de x^2 par la division par 4 est égal à 0 si x est pair et le reste de y^2 est 1 si y est impair .
Alors par la question 1) , le reste de p dans la division euclidienne par 4 sera égal au reste de $x^2 + y^2$ c'est-à-dire 1 .

Pour finir , on aurait sur la feuille de brouillon :

X pair alors $X^2 \equiv 0[4]$ et Y impair alors $Y^2 \equiv 1[4]$
X et Y même parité alors $x^2 + y^2$ pair
X pair , Y impair
On veut $p = x^2 + y^2$ alors $p \equiv 1[4]$

La copie :

1) On dresse une table de congruence :

X	0	1	2	3
X^2	0	1	0	1

<u>Les restes possibles de x^2 dans la division euclidienne par 4 sont donc 0 ou 1</u>

2) On a si x et y sont pairs : $x \equiv y \equiv 0[2]\ donc\ x^2 \equiv y^2 \equiv 0[2]$ donc $x^2 + y^2 \equiv 0[2]$ donc x^2+y^2 pair
   On a si x et y sont impairs :
   $x \equiv y \equiv 1[2]\ donc\ x^2 \equiv y^2 \equiv [2]\ donc\ x^2 + y^2 \equiv 2 \equiv 0[2]$ donc x^2+y^2 pair

<u>En conclusion : si x et y ont même parité , alors p est pair</u>
Or dans l'énoncé , on nous dit que p est impair : x et y sont donc de parité différente .
<u>On peut décider que x est pair et y impair</u>

3) On veut que p soit la somme de deux carrés : par la question 2) , on a vu qu'alors x doit être pair et y impair .

La question 1 nous a montré que le reste de x^2 par la division par 4 est égal à 0 si x est pair et le reste de y^2 est 1 si y est impair .
Alors par la question 1) , le reste de p dans la division euclidienne par 4 sera égal au reste de $x^2 + y^2$ c'est-à-dire 1 .
<u>Conclusion : pour que $p = x^2 + y^2$ alors $p \equiv 1[4]$</u>