Les différents raisonnements

On va voir dans cette fiche les raisonnements qu'on utilise dans le chapitre arithmétique . Plusieurs peuvent être déconcertants au départ , mais vous verrez , on s'y fait très vite .

I) Le raisonnement par récurrence

Voir la partie obligatoire du site

II) Le raisonnement par disjonction de cas

Ce raisonnement est utilisé quand on peut découper l'ensemble sur lequel doit se faire la démonstration en plusieurs groupes disjoints .
Exemples :
Quand on doit faire une démonstration sur l'ensemble des entiers , on peut travailler d'abord avec les nombres pairs puis ensuite avec les nombres impairs . Si notre propriété est vraie dans les deux cas , elle est vraie pour tous les entiers .
On peut aussi tester toutes les valeurs quand on travaille avec les congruences .

Premier raisonnement par disjonction

Montrer que le carré d'un entier a la même parité que celui-ci
Premier cas : on suppose n pair . Alors il existe k entier relatif tel que n = 2k . On a alors $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Et puisque $2k^2$ est un entier relatif alors , n^2 est pair
Deuxième cas : on suppose n impair . Alors il existe k entier relatif tel que n = 2k + 1 . On a alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et puisque $2k^2 + 2k$ est entier relatif alors n^2 est impair .

Deuxième raisonnement par disjonction

Montrer que pour tout entier n , on a : $4^n - 1$ divisible par 3 .
On va travailler modulo 3 et donc étudier les cas $n \equiv 0[3]$; $n \equiv 1[3]$ et enfin $n \equiv 2[3]$.
Premier cas : $n \equiv 0[3]$. Alors $4^n - 1 \equiv 4^0 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0[3]$ et donc $4^n - 1$ divisible par 3 .
Deuxième cas : $n \equiv 1[3]$. Alors : $4^n - 1 \equiv 4^1 - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 3 \equiv 0[3]$ et donc $4^n - 1$ divisible par 3 .
Troisième cas : $n \equiv 2[3]$. Alors : $4^n - 1 \equiv 4^2 - 1 \equiv 16 - 1 \equiv 15 \equiv 0[3]$ et donc $4^n - 1$ divisible par 3 .

III) Raisonnement par l'absurde

Très souvent utilisé en arithmétique , il permet de faciliter la rédaction . Son principe est simple : on suppose vrai le contraire de la conclusion cherchée et par démonstration , on arrive à une contradiction par rapport à l'hypothèse .

Premier raisonnement par l'absurde

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel
On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel
Alors par définition , il existe p et q entiers relatifs premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
On a alors $2q^2 = p^2$. On a donc p^2 pair et donc p est pair . Il existe donc k entier relatif tel que p = 2 k . On obtient ainsi : $2q^2 = 4k^2$ et donc $q^2 = 2k^2$. Ainsi q^2 est pair et donc q est pair
Mais alors p et q ont même parité et ne sont donc pas premiers entre eux ! Contradiction .
L'hypothèse de départ est donc fausse et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Deuxième raisonnement par l'absurde

Montrer qu'on ne peut pas diviser par 0
Supposons que l'on puisse diviser par zéro .
Alors pour tout réel A il existe B réel tels que $B = \frac{A}{0}$ et donc $A = B \times 0 = 0$ donc tous les réels sont nuls ! Contradiction
On ne peut donc pas diviser par 0 .

Troisième raisonnement par l'absurde

Soient a = n (3n + 1) et b = n + 1 . Montrer que si n est pair alors 2 n'est pas diviseur commun à a et b .
Supposons 2 diviseur commun à a et b . Alors 2 divise n + 1 impair car n impair .
Contradiction . Donc 2 n'est pas diviseur commun à a et b .

IV) Raisonnement par contraposée

Si on a une implication : $A \Rightarrow B$ alors sa contraposée est : $nonB \Rightarrow nonA$.

Si une implication est vraie alors sa contraposée aussi .
On utilise ce principe pour démontrer des propriétés

Premier raisonnement par contraposée

Montrer que si n^2 est impair , alors n est impair
La contraposée de cette proposition est : si n pair alors n^2 pair .
Montrons la : si n pair , alors il existe k entier relatif tel que n = 2 k et donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et puisque $2k^2$ entier alors n^2 pair . Puisque la contraposée est vraie , alors la proposition de départ « n^2 impair alors n impair » est vraie aussi .

Deuxième raisonnement par contraposée

On veut montrer que si un produit de deux entiers est impair , alors les deux entiers sont impairs
La contraposée de cette proposition est : le produit de deux entiers dont l'un au moins est pair est un entier pair
Montrons la : Soient a = 2p et b = 2k + 1 alors ab = 4bk + 2p = 2(2bk + p)

Remarque

Le raisonnement par l'absurde et le raisonnement par contraposée sont très proches . C'est un peu le même style de raisonnement , seule la rédaction change . Ce n'est pas très grave de ne pas bien faire la distinction entre les deux pour l'instant .