Fiche méthode sur la division euclidienne

Principe fondamental

La division euclidienne est une division écrite de façon détaillée : on regarde combien de fois apparaît le nombre qui divise et quel reste on obtient .
Et on apprend bien par cœur :

Soient deux entiers naturels a et b avec b non nul . Il existe un unique couple (q ; r) avec q et r entiers naturels tels que a = bq + r avec $0 \leq r < b$, r est le reste de a par b dans la division euclidienne .

Exemple 1 : reste dans une division euclidienne

On sait depuis l'enfance que : $14 = 5 \times 2 + 4$
On est en présence de la division euclidienne de 14 par 5 .
Et pourquoi pas par 2 allez-vous me demander ?
Et bien pour avoir devant les yeux une division euclidienne et pas une division quelconque , il faut que le reste soit plus petit que le diviseur !
Dans notre exemple , 4 est plus petit que 5 donc c'est la division euclidienne de 14 par 5 mais 4 n'est pas plus petit que 2 , ce n'est donc pas la division euclidienne de 14 par 2 !

Exemple 2 : trouver le reste si la division n'est pas euclidienne

Si on vous donne une égalité : $286 = 39 \times 7 + 13$ (vous avez le droit de ne pas me croire sur parole et de vérifier qu'elle est vraie) , par ce qui a été rappelé précédemment , c'est la division euclidienne de 286 par 39 car 13 < 39 , mais ce n'est pas la division euclidienne de 286 par 7 (car 13 > 7).
Mais si on veut , sans avoir recours à la calculatrice , donner la division euclidienne de 286 par 7 , on peut utiliser cette égalité .
Le reste est trop grand (puisqu'il est plus grand que le diviseur) , on doit donc le diminuer ; puisqu'on divise ici par 7 , on doit lui enlever 7 autant de fois que nécessaire .
On écrit : $286 = 39 \times 7 + 13 - 7 + 7 = 39 \times 7 + 7 + 6 = 40 \times 7 + 6$; on a 6 < 7 donc cette fois ci , on a bien la division euclidienne de 286 par 7 . (C'est aussi la division euclidienne de 286 par 40)

- ***Soyez donc observateurs et méfiants !***

Et si on jouait avec des n ?

- Le principe est le même : le reste doit être à la fois positif et plus petit que le diviseur !

On doit donc vérifier à chaque fois que les deux conditions sont vérifiées .
Il faut d'abord écrire une égalité sous forme de division , puis en déduire la division euclidienne demandée .

- ***Exemple 1***

Déterminer le reste de $n^2 + 3n + 1$ dans la division euclidienne par n + 1 .

- *Trouver une division*

On peut utiliser l'identification , la division posée comme en primaire ou même le bricolage !

- Identification :on écrit $n^2 + 3n + 1 = (an + b)(n + 1) + c$ et on cherche a , b et c ; ici : $an^2 + (b+a)n + b + c = n^2 + 3n + 1$ donc a = 1 ; b + a = 3 donc b = 2 et b + c = 1 donc c = - 1 . Et donc $n^2 + 3n + 1 = (n + 2)(n + 1) - 1$ (attention , c'est une division mais pas la division euclidienne !)

- Division posée : on pose comme en primaire :

$n^2 + 3n + 1$	$n + 1$
$-n^2 - n$	$n + 2$
$2n+1$	
$-2n-2$	
-1	

On a bien la même division : n² + 3 n + 1 = (n + 1) (n + 2) – 1

Déterminer la division euclidienne

On a une égalité mais elle doit vérifier les conditions sur le reste : r ≥ 0 et r < diviseur .
On va chercher à déterminer la division euclidienne de n² + 3n + 1 par n + 1 .
-1 < 0 donc ce ne peut pas être le reste ; il est trop petit ; on va donc l'augmenter en lui ajoutant le diviseur (mais on l'enlève aussitôt pour ne pas changer l'égalité) :
On a : n² + 3 n + 1 = (n + 1) (n + 2) – 1 + n + 1 – (n + 1) = (n + 1) (n + 2 – 1) + n soit n² + 3n + 1 = (n + 1) (n + 1) + n .
On sait que n est entier naturel donc positif ; on est sur la bonne voie . A-t-on n < n + 1 ? Oui par définition des entiers positifs .
Conclusion : la division euclidienne de n² + 3 n + 1 par n + 1 est n² + 3n + 1 = (n+1)(n+1) + n et dans cette division , le reste est égal à n .

- ***Exemple 2***

Déterminons le reste de la division euclidienne de $A = [n^2 + (n-1)^2]^2$ par 4n² avec n entier naturel .

Trouver une division

On a : $[n^2 + (n-1)^2]^2 = n^4 + (n-1)^4 + 2n^2(n-1)^2 = 4n^4 - 8n^3 + 8n^2 - 4n + 1$
Donc A = 4n²(n²-2n+2) – 4n + 1

Déterminer la division euclidienne

Or : $-4n + 1 > 0 \Leftrightarrow n < 0{,}25$ soit n = 0 .
Donc si n > 0 , cette décomposition n'est pas une division euclidienne car le reste est négatif .
A = 4n² (n² - 2n + 1) – 4n + 1 + 4n²
Etudions 4n² - 4n + 1 = (2n – 1)² > 0
A-t-on maintenant 4n² - 4 n + 1 < 4n² ?

$$4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 \Leftrightarrow -4n + 1 < 0 \Leftrightarrow n > 0{,}25$$

Conclusion :

Si n = 0 , le reste est égal à 1
Si n > 0 , alors la division euclidienne de A par 4n² est :
$A = 4n^2(n^2 - 2n + 1) + 4n^2 - 4n + 1$