Fiche méthode : équations diophantiennes

Résoudre une équation diophantienne

Principe

Résoudre une équation diophantienne se passe en deux ou trois temps

1) On détermine un solution particulière (un ou deux temps)
2) On détermine l'ensemble des solutions en utilisant le théorème de Gauss

Une équation diophantienne est de la forme : ax + by = c avec a , b , c , x et y des entiers relatifs et le but est de trouver (x ;y) .

Une équation diophantienne a des solutions si et seulement si c est un multiple de PGCD(a ;b)

- Avant de commencer la résolution d'une équation diophantienne , on la simplifie . Pourquoi ? Parce que pour pouvoir utiliser le théorème de Gauss , on a besoin que a et b soient premiers entre eux !

On va travailler sur un exemple détaillé

Résoudre : 630 x – 1088 y = 20 avec x et y entiers relatifs .

- *Avant de commencer*

Vérifions s'il y a des solutions : à la calculatrice , on détermine PGCD(630 ;1088) = 2 . Comme 20 est un multiple de 2 , il y a des solutions donc on peut poursuivre .

Simplifions par 2 :

315 x – 544 y = 10

- *Solution particulière de 315 x – 544 y = 1*

On écrit l'algorithme d'Euclide :

544 = 315 + 229

315 = 229 + 86

229 = 2(86) + 57

86 = 57 + 29

57 = 29 + 28

29 = 28 +1

Puis , on va « remonter » pour aboutir à une égalité du type 1 = …. 315 + ….. 544

Pour cela , on garde 544 et 315 à chaque fois qu'on les trouve puis on remplace les autres nombres par l'égalité « la plus haute » dans l'algorithme .

1 = 29 – 28 = 86 – 57 – (57 – 29) = 86 – 2(57) + 29

= 315 – 229 – 2 (229 – 2(86)) + 86 – 57 = 315 – 3 (229) + 5 (86) – 57

= 315 – 3 (544 – 315) +5(315 – 229) – (229 – 2(86)) = - 3 (544) + 9(315) – 6(229) + 2(86)

= 9 (315) – 3(544) – 6 (544 – 315)+2(315 – 229) = - 9(544) +17 (315) -2(229)

= - 9 (544) +17 (315) – 2 (544 – 315) = -11 (544) +19(315)

On a donc : 1 = 315 (19) – 11 (544)

La solution particulière de 315 x – 544 y = 1 est donc le couple (19 , 11)

- Faire attention de bien mettre les solutions dans le bon ordre (c'est pour ça qu'en général on note : $(x_0; y_0) = (19; 11)$)

- *Solution particulière de 315 x – 544 y = 10*

Puisque 315 (19) – 11 (544) = 1 alors en multipliant les deux membres par 10 , on a :

315 (190) – 110 (544) = 10

Donc une solution particulière de 315 x – 544 y = 10 est le couple : $(x'_0; y'_0) = (190; 110)$

- *Solution générale de 315 x – 544y = 10*

L'équation est vraie pour la solution particulière donc $315x'_0 - 544y'_0 = 10$

On veut : 315 x – 544 y = 10

C'est le même « 10 » donc : $315x'_0 - 544y'_0 = 315x - 544y$

On regroupe les « 315 » d'un côté et les « 544 » de l'autre

$$315(x'_0 - x) = 544(y'_0 - y)$$

Maintenant , attention à la rédaction :

544 divise $315(x'_0 - x)$, 315 et 544 sont premiers entre eux donc par le théorème de Gauss , 544 divise $x'_0 - x$

Il existe donc k entier relatif tel que $x'_0 - x = 544k$ ce qui donne : x = 190 – 544 k

On remplace dans l'équation :

$$315(x'_0 - x) = 544(y'_0 - y) \Rightarrow 315(544k) = 544(y'_0 - y) \Rightarrow y = 110 - 315k$$

On vérifie que le couple trouvé fonctionne : 315(190 – 544 k) – 544 (110 – 315k) = 10 .

Les solutions sont donc les couples (190 – 544k ; 110 – 315k) avec k entier relatif

Fiche méthode : équations diophantiennes

Utilisation des équations diophantiennes

Résoudre des systèmes de congruences

On veut résoudre $\begin{cases} x \equiv 1[11] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$

Par définition , il existe u et v entiers relatifs tels que x = 11 u + 1 et x = 4v + 3

On doit donc résoudre : 11 u + 1 = 4v + 3 c'est-à-dire 11 u – 4 v = 2

C'est bien une équation diophantienne .

Solution particulière : $(u_0; v_0) = (2; 5)$

Solution générale :

On a : u = 4k + 2 et v = 11 k + 5

Donc x = 11 u + 1 = 11 (4 k + 2) + 1 = 23 + 44 k

Déterminer un PGCD

Il s'agit évidemment de déterminer en fonction de n le PGCD de deux nombres définis avec n

Exemple

Soient a = 11 n + 3 et b = 13 n – 1 . Déterminer n pour que PGCD(a ;b) = 50

Supposons d = 50 , alors il existe x et y tels que a = 50 x et b = 50y donc 50x = 11 n + 3 . On doit donc résoudre 50x – 11 n = 3 (c'est une équation diophantienne) . De la même façon , 50y = 13 n – 1 donc à résoudre : 50 y – 13 n = - 1 (c'est aussi une équation diophantienne)

Résolvons la première :

50 x – 11 n = 3

Solution particulière :

50 = 4(11) + 6

11 = 6 + 5

6 = 5 +1

Donc 1 = 6 – 5 = 50 – 4(11) – (11 – 6) = 50 – 5 (11) + 6 = 50 – 5(11) + (50 – 4(11))

1 = 2(50) – 9(11)

Donc 3 = 6(50) – 27(11) donc $(x_0; n_0) = (6; 27)$

Solution générale (en version abrégée) : x = 11 k + 6 et n = 27 + 50 k

Il n’est pas nécessaire de résoudre la deuxième équation mais il faut absolument vérifier que cette solution convient :

On pose n = 27 + 50k

Alors a = 11n + 3 = 11 (27 +50k) + 3 = 300 + 550 k = 50 (6 + 11k)

De même : b = 13 n – 1 = 13 (27 +50 k) – 1 = 50 (7 + 13 k)

Or 13 (6 +11k) – 11 (7 +13k) = 1 donc par le théorème de Bézout , 6 + 11k et 7 +13 k sont premiers entre eux donc PGCD(a ;b) = 50 .

Notre réponse est donc PGCD(a ;b) = 50 si et seulement si n = 27 + 50k

Déterminer des entiers dont on connaît les restes dans des divisions euclidiennes

Déterminer les entiers relatifs qui ont 3 pour reste dans la division euclidienne par 27 et qui ont 2 pour reste dans la division euclidienne par 23 .

Il existe x et y tels que : n = 3 + 27x = 2 + 23y soit 23 y – 27 x = 1 (c’est une division euclidienne)

Solution particulière :

27 = 23 + 4

23 = 5(4) + 3

4 = 3 + 1

Donc 1 = 4 – 3 = 27 – 23 – 23 + 5(4) = 27 – 2(23) + 5(27 – 23)=6(27) – 7(23)

Donc $(x_0; y_0) = (-7; -6)$

Solution générale :

On a : y = 27 k – 6 et x = 23 k – 7

Réponse : n = 3 + 27 x = 3 + 27(23 k – 7) = -186 +435 k .