Matrices : premiers pas

Opérations de base

- L'addition

On ajoute les éléments placés au même endroit tout simplement !

- La soustraction

Idem

- La multiplication

Attention : la multiplication n'est pas commutative avec des matrices . C'est-à-dire que AB est différent de BA ; Donc attention à l'ordre dans le calcul .
Le plus simple , poser la multiplication de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} & \text{Matrice B} \\ & \begin{pmatrix} e & . & . \\ f & . & . \\ g & . & . \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} ae+bf+cg & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \\ \text{Matrice A} & \text{Matrice AB} \end{array}$$

La première ligne de la matrice de gauche se multiplie avec la première colonne de la matrice en haut à droite et le résultat est l'intersection de la première ligne et de la première colonne de la matrice produit . Et ainsi de suite …

Puissances de matrices

Pour calculer des puissances , il suffit de faire des multiplications successives .

$$A^2 = AA \quad A^3 = A^2A \; ....$$

Mais on peut demander A^n ! Dans ce cas , on attend une formule qui donnera la matrice selon les valeurs de n .
Comment faire ?
Calculer les premières puissances : A^2 , A^3 , A^4 ... et essayer de deviner une formule générale . Je sais , ce n'est pas toujours facile !
Puis , une fois que la formule semble fonctionner pour ces puissances , la démontrer par … récurrence !!!! Eh oui , là aussi , on retrouve ce beau raisonnement !!

Déterminant d'une matrice

- En dimension 2

C'est facile , c'est la formule de la colinéarité :

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- De façon générale

Si A est une matrice carrée de taille n , on a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}\, \Delta_{i1}$$

Δ_{i1} *est le mineur de A de position* $(i,1)$; il correspond au déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la première colonne et la ième ligne .

<u>Exemple</u>

On développe par rapport à la première colonne , c'est-à-dire que l'on prend chaque élément de la première colonne , et qu'on le multiplie avec le déterminant restant dans lequel on a enlevé la ligne de cet élément . En couleur , on a les éléments et leurs mineurs :

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} \ et \ \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

Ensuite on n'oublie pas d'alterner les signes , ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Inversion de matrices

- La matrice est-elle inversible ?

On calcule son déterminant :
S'il est nul , la matrice n'est pas inversible ;
S'il est non nul , la matrice est inversible .

- Trouver l'inverse

Pour déterminer ensuite l'inverse d'une matrice , on utilise en terminale , la calculatrice ! Mais il y a évidemment des techniques pour la trouver à la main . Je vais vous en expliquer une .
Il faut écrire la matrice à inverser et à côté d'elle , la matrice identité .
En appliquant des opérations élémentaires à chacune , on va transformer la matrice à inverser en matrice identité , et la matrice identité va devenir l'inverse qu'on cherche !

Mais qu'est ce qu'une opération élémentaire ?

Echanger deux colonnes (ou deux lignes) entre elles Remplacer C_i par $C_i + k\ C_j$ Diviser une colonne par un scalaire

Attention !

On ne mélange pas les colonnes et les lignes ! Soit on travaille exclusivement sur les lignes , soit exclusivement sur les colonnes !

Personnellement , je trouve plus naturel de travailler avec les colonnes mais c'est une question de préférences !

Exemple

Déterminer l'inverse de A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On écrit A à gauche et l'identité à droite :

Matrices : premiers pas

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à faire disparaitre – 2 dans A (pour se rapprocher de la matrice identité qui a des zéros partout sauf sur la diagonale) ; pour cela on remplace C2 par C2 + 2 C1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à faire disparaitre $a_{13} = 1$: on remplace C3 par C3 –C1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On cherche à faire disparaitre $a_{21} = 1$: on remplace C1 par C1 -1/4 C2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reste le – 1 en bas à gauche : on remplace C1 par C1 +1/2 C3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On divise maintenant la deuxième colonne par 4 puis la troisième colonne par 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$