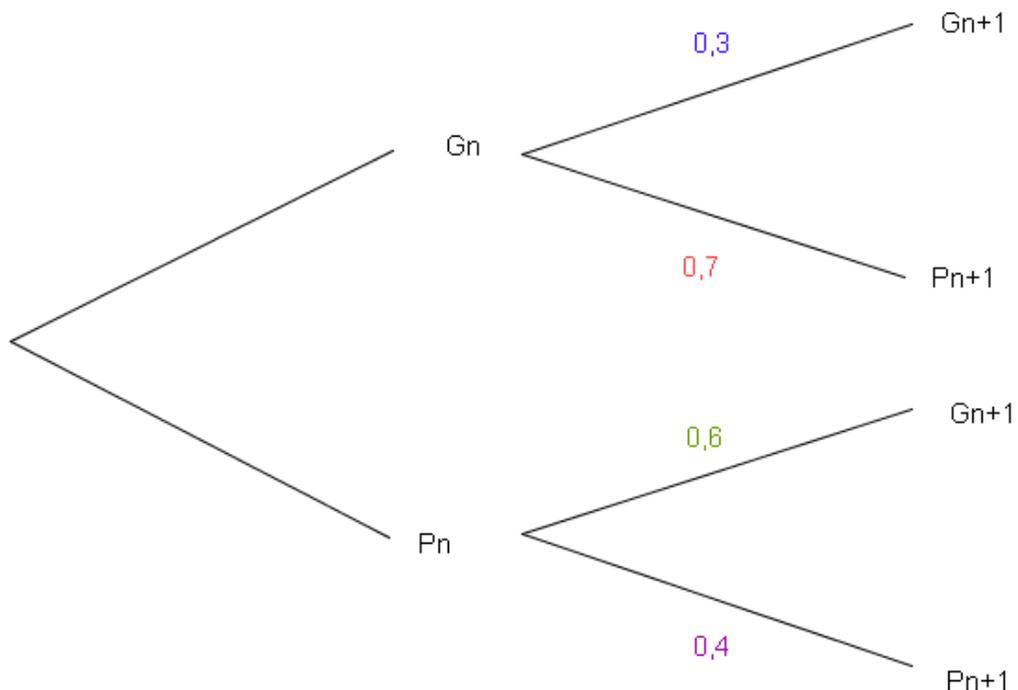


Qu'est-ce qu'un graphe probabiliste ?

Vous savez faire des arbres pondérés en probabilités , c'est le même principe mais on présente différemment .

Par exemple , lors d'un jeu , s'il a gagné une partie , la probabilité que le joueur gagne la partie suivante est 0,3 et s'il a perdu une partie , la probabilité qu'il perde la suivante est 0,4 , est représenté par l'arbre suivant :



Le graphe probabiliste ne va pas distinguer une partie de la suivante par  $n$  et  $n + 1$  mais va juste regarder comment on passe de gagner à perdre et réciproquement , ce qui donne :



Matrice de transition

- La déterminer

La matrice de transition a pour éléments les probabilités du graphe probabiliste . lorsqu'il n'y a rien de précisé , on considère que les événements du graphe sont rangés par ordre alphabétique dans la matrice de transition .

Gardons notre exemple précédent :

## Graphes probabilistes et matrices de transitions

$G$                        $P$

$$\begin{matrix} G & \left( \begin{array}{cc} \text{proba de } G \text{ à } G & \text{proba de } G \text{ à } P \\ \text{proba de } P \text{ à } G & \text{proba de } P \text{ à } P \end{array} \right) \\ P & \end{matrix}$$

La matrice de transition de notre exemple est donc :

$$T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$$

### • L'utiliser

Quand on a la matrice de transition , on a donc les probabilités conditionnelles .

✚ On peut l'utiliser pour déterminer des expressions de suites de probabilités .

Toujours dans notre exemple , notons  $g_n$  et  $p_n$  les probabilités respectives de  $G_n$  et  $P_n$  , les événements gagner et perdre la partie n .

Alors :  $g_{n+1} = 0,3g_n + 0,6p_n$  et  $p_{n+1} = 0,7g_n + 0,4p_n$

En effet , la matrice de transition donne par colonne , les probabilités des nouveaux événements

$$\begin{array}{ll} \text{proba de } G_{n+1} \text{ en fonction des précédents} & \text{proba de } P_{n+1} \text{ en fonction des précédents} \\ \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

✚ On peut aussi déterminer les probabilités de gagner une partie donnée.

Pour cela, il faut l'état initial ( les probabilités de gagner ou perdre la première partie ) et faire attention à la signification de n .

Toujours sur notre exemple , supposons que la probabilité de gagner la partie 1 est 0,8 . Alors (0,8 0,2) est l'état initial .

$$\begin{aligned} (g_1 \quad p_1) &= (0,8 \quad 0,2) \\ (g_{n+1} \quad p_{n+1}) &= (g_n \quad p_n)T \\ (g_2 \quad p_2) &= (g_1 \quad p_1)T \end{aligned}$$

Et donc on peut généraliser , si on cherche la probabilité de gagner la partie 7 :

$$(g_7 \quad p_7) = (g_1 \quad p_1)T^6$$

✚ On peut aussi déterminer ce qui se passe à long terme

Pour cela , il faut être capable de déterminer une formule donnant  $T^n$

Soit par conjecture puis raisonnement par récurrence

Soit on vous guide

Soit avec les méthodes de diagonalisation ( voir fiche sur suites de matrices )

Et ensuite , on applique :

$$(g_n \quad p_n) = (g_1 \quad p_1)T^{n-1}$$