Suites de matrices

Petite parenthèse : suites numériques arithmético-géométriques

On sait que si une suite est arithmétique ou géométrique , on peut exprimer grâce aux formules le terme en fonction de n , ce qui facilite l'étude de la convergence .
Mais , hélas , toutes les suites ne sont pas arithmétiques ou géométriques .
Or , il en existe une autre famille , assez proche des deux précédentes , celles qu'on appelle arithmético-géométriques . Elles sont de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$

- Comment les étudier ?

On commence par chercher un éventuel point fixe , c'est-à-dire u tel que u = a u + b .
S'il existe , on pose la suite $v_n = u_n - u$, et on montre que cette suite est géométrique .
On a alors , si on appelle q la raison de cette suite :

$$v_n = v_0 \times q^n \; donc \; u_n - u = (u_0 - u) \times q^n \; et \; donc$$

$$\boxed{u_n = (u_0 - u) \times q^n + u}$$

- Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2 \; et \; u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Cherchons s'il existe c tel que c = 3c – 2 alors c = 1
Posons $v_n = u_n - 1$
Alors :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 2 - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1) = 3v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3 ; $v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

$$v_n = v_0 \times 3^n = 3^n$$

$$u_n - 1 = 3^n \; donc \; u_n = 3^n + 1$$

Etude de suites de matrices

Les suites de matrices que nous devons étudier en terminale sont définies par le premier terme et par une relation de récurrence de la forme : $U_{n+1} = AU_n + B$ avec U_n une matrice colonne , B une matrice colonne et A une matrice carrée .

- Si B = 0 , alors $U_{n+1} = AU_n$

On est dans ce cas dans la configuration de suites géométriques .
On raisonne de la même façon et on applique la formule des suites géométriques numériques :

$$U_n = A^n U_0$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_{n+1} = AU_n$, $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Par récurrence , montrons que $U_n = A^n U_0$
Initialisation : $U_0 = A^0 U_0$ car $A^0 = I$
Hérédité : supposons que pour un n donné , $U_n = A^n U_0$
Alors $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$
A est une matrice diagonale , donc $A^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
On a alors : $U_n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0,5^n \\ 1 \end{pmatrix}$

- Si B n'est pas nul , $U_{n+1} = AU_n + B$

On est dans la configuration des suites numériques arithmético-géométriques et on raisonne de la même façon :
On regarde s'il existe une matrice C telle que C = AC + B
On adapte alors la formule des suites arithmético-géométriques :

$$U_n = A^n(U_0 - C) + C$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $U_{n+1} = AU_n + B$, $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Regardons s'il existe C telle que AC + B = C

$$AC - C = B \Leftrightarrow (A - I)C = B \Leftrightarrow C = (A - I)^{-1}B$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ , det}(A - I) = 0{,}8 \neq 0 \; donc \; A - I \; inversible$$

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}25 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; donc \; C = \begin{pmatrix} -1{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Posons $V_n = U_n - C \; alors$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C = AU_n + B - (AC + B) = A(U_n - C) = AV_n$$

Alors comme dans l'exemple précédent , on peut montrer par récurrence que $V_n = A^n V_0$

$$V_n = \begin{pmatrix} 0{,}2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \times 0{,}2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$$

$$U_n = \begin{pmatrix} 3{,}25 \times 0{,}2^n \\ 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \times 0{,}2^n - 1{,}25 \\ 2^n \end{pmatrix}$$

Calculer A^n

- A est diagonale

Alors , c'est très simple ! On met à la puissance n les éléments de la diagonale

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; donne \; A^n = \begin{pmatrix} 0{,}2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- Déterminer une formule générale directement

On peut conjecturer la formule en calculant les premières puissances puis la démontrer par récurrence

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec la calculatrice ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} , A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , A^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{3n} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; A^{3n+1} = A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; et \; A^{3n+2} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Diagonalisation de la matrice

Quand la matrice semble compliquée , il est judicieux de regarder si on peut diagonaliser la matrice , c'est-à-dire s'il existe P inversible et D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$

- *Méthode*

On résout : $\det(A - kI) = 0$

Les valeurs k sont appelées valeurs propres et sont les éléments diagonaux de D
Puis on trouve X telle que AX = kX .
Les X sont appelés vecteurs propres et forment les colonnes de P
Attention : l'ordre est important et il faut ranger les k et les X correspondants dans le même ordre .

Exemple

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - kI) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-k & 8 \\ 0,25 & -k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -k(1-k) - 2 = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (k+1)(k-2) = 0$$

Les valeurs propres sont donc -1 et 2
Résolvons AX = -X

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = -x \\ 0,25x = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$$

On peut donc choisir : $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Résolvons AX = 2X

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 8y = 2x \\ 0,25x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8y \\ x = 8y \end{cases}$$

On peut donc choisir : $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \; et \; P = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A la calculatrice : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/12 & 2/3 \\ 1/12 & 1/3 \end{pmatrix}$

- ***Utilisation de la diagonalisation pour trouver A^n***

$$A = PDP^{-1} \; donc \; A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

On le montre proprement par récurrence !!
On a donc :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/12 & 2/3 \\ 1/12 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \times (-1)^n & 8 \times 2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/12 & 2/3 \\ 1/12 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{4 \times (-1)^n + 8 \times 2^n}{12} & \dfrac{-8 \times (-1)^n + 8 \times 2^n}{3} \\ \dfrac{-(-1)^n + 2^n}{12} & \dfrac{2 \times (-1)^n + 2^n}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$