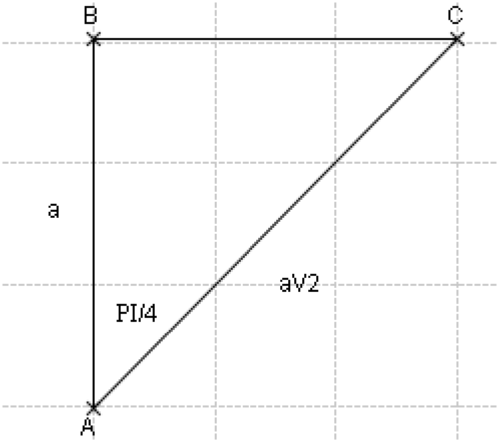
Démontrer qu'un triangle est rectangle isocèle

Evidemment , dit comme ça , c'est simple !
Pythagore , la trigo …
Mais là , on change la donne
Soit ABC un triangle tel que $C = \sqrt{2}AB\ et\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$. Montrer que ABC est rectangle isocèle en B !

<u>Première méthode :On utilise Al Kashi</u>



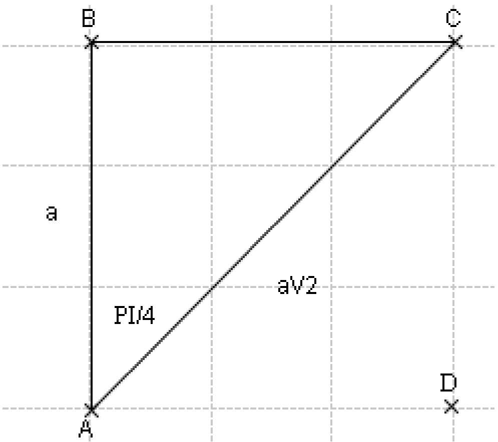
$$\frac{BC}{sin\frac{\pi}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{sin\hat{B}} = \frac{a}{sin\hat{C}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{sin\hat{B}} = \frac{1}{sin\left(\frac{3\pi}{4} - \hat{B}\right)} \Leftrightarrow sin\hat{B} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}cos\hat{B} + \frac{\sqrt{2}}{2}sin\hat{B}\right)$$

$$\Leftrightarrow cos\hat{B} = 0 \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{2}$$

Le triangle ABC est donc rectangle en B .
On démontre ensuite facilement qu'il est isocèle avec le calcul de $\hat{C}$ ou celui de BC avec Pythagore

<u>Deuxième méthode : on utilise les complexes et un repère</u>

Puisque $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$, on peut créer un repère en plaçant le point D tel que $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{4}$ et AD = a



On travaille alors dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)$

$$z_A = 0\ ;\ z_B = ia\ ;\ z_C = a\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = a(1+i)$$

$$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = arg\left(\frac{a(1+i) - ia}{-ia}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

Troisième méthode : la plus simple

Soit H le projeté orthogonal de C sur [AB] (je vous rappelle qu'on ne sait pas que ABC est rectangle en B)

Le triangle AHC est donc rectangle en H et on peut utiliser les formules de trigonométrie

$$cos45 = \frac{AH}{AC}\ donc\ AH = a = AB$$

Et donc H = B

Et le triangle ABC est donc rectangle en B