Variations, majoration et minoration de suites

Variations de suites

En général

On dit qu'une suite (u_n) est constante à partir du rang n_0 si pour tout entier $n \geq n_0$: $u_{n+1} = u_n$.

Une suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0, si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Une suite (u_n) est décroissante à partir du rang n_0, si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

Une suite qui est soit croissante, soit décroissante est dite monotone.

- Dans la pratique, on calcule toujours $u_{n+1} - u_n$ et on regarde son signe.

Exemple

Etudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3 + u_n$
Calculons : $u_{n+1} - u_n = 3 + u_n - u_n = 3 > 0$
La suite est donc croissante

Remarque

Lorsque la suite est strictement positive, on peut également regarder si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1.

Quand la suite est définie par $u_n = f(n)$

Il est important de bien connaître la définition : f est croissante si $a < b$ entraine $f(a) < f(b)$
Le raisonnement n'est pas le même si la fonction f est monotone ou non.

Exemple 1

Soit la suite $u_n = \sqrt{n} - 3$. Etudier les variations de cette suite

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x} - 3$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ donc la fonction f est croissante

Voici le point de rédaction le plus important alors attention :
On a $n < n + 1$, or f est croissante donc $f(n) < f(n + 1)$ donc $u_n < u_{n+1}$ et la suite (u_n) est croissante

Exemple 2

Soit la suite $u_n = n + \dfrac{3}{4n+2}$. Etudier les variations de cette suite

Soit $f(x) = x + \dfrac{3}{4x+2}$ alors $f'(x) = 1 - \dfrac{12}{(4x+2)^2} = \dfrac{16x^2+16x-8}{(4x+2)^2} = \dfrac{4x^2+4x-2}{(2x+1)^2}$

Etudions le signe de la dérivée : $\Delta = 48$ donc $f'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right[$, f n'est pas monotone.

Calculons $u_{n+1} - u_n =$

$$n+1+\frac{3}{4n+6}-n-\frac{3}{4n+2}=\frac{(4n+6)(4n+2)+3(4n+2)-3(4n+6)}{(4n+6)(4n+2)}=\frac{16n^2+32n}{(4n+6)(4n+2)}=\frac{4n^2+8n}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$=\frac{4n(n+2)}{(2n+3)(2n+1)} \geq 0$$ car n est un entier naturel

Donc la suite (u_n) est croissante.

Variations, majoration et minoration de suites

Suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le principe est le même que précédemment, et il faut bien soigner la rédaction car on doit souvent utiliser un raisonnement par récurrence

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Etudier les variations de cette suite.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x+2}$. Alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$: la fonction f est donc croissante si $x > 0$

On montre très vite (par récurrence) que $u_n > 0$

Nous allons montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante

Initialisation : $u_0 = 6$ et $u_1 = 2\sqrt{2}$ donc $u_0 \geq u_1$

Hérédité : (HR) supposons $u_n \geq u_{n+1}$ au rang n

Puisque f est croissante, alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$

Donc $u_{n+1} \geq u_{n+2}$

On en conclut que $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n

La suite (u_n) est donc croissante

- Il y a souvent plusieurs méthodes qui aboutiront, c'est la pratique qui aide à choisir la plus judicieuse

Majoration, minoration

Une suite (u_n) est majorée à partir du rang n_0 ; s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$

Une suite (u_n) est minorée à partir du rang n_0, s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.

Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée

- Dans la pratique, on utilise souvent un raisonnement par récurrence pour montrer qu'une suite est majorée ou minorée.

Exercices

Exercice 1

Etudier les variations des suites suivantes :

1) $u_n = \dfrac{3}{n^2}$
2) $u_n = \sqrt{3n+1}$
3) $u_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$
4) $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$
5) $u_n = n!$
6) $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 0$
7) $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$ et $u_0 = 1$
8) $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 1$
9) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$
10) $u_n = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{2n-1}{2n}$
11) $u_n = n^3 - 2n^2 - n$
12) $u_{n+1} = u_n^{\,2}$ et $u_0 = \dfrac{8}{7}$
13) $u_n = 2n + \sin n$

Exercice 2
Les suites suivantes sont-elles majorées, minorées ? Justifier

1) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 8$
2) $u_n = 5\sin(5n+1) - 3$
3) $u_n = \frac{n^2+1}{n^2+5}$
4) $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

1) Montrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout n
2) En déduire que la suite est croissante

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{u_n+3}$

1) Montrer par récurrence que : $-1+\sqrt{2} \leq u_n \leq 1$
2) Prouver que la suite est décroissante

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2n+1}{3n-1}$ pour tout n. Montrer de deux façons différentes que cette suite est majorée par $\frac{3}{2}$

Coup de pouce : une des méthodes utilise une fonction !

Exercice 6

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$ et $v_n = \frac{u_n}{u_n+2}$

Montrer que la suite (u_n) est bornée par 2 et 3
Montrer que la suite (v_n) est bornée par 0,5 et 0,6.

Exercice 7
Montrer que les suites sont bornées :

1) $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 5$, minorant : 0,5 et majorant : 5
2) $u_n = \frac{(-1)^n n + \cos n}{1+n}$

Exercice 8
Etudier les suites (variations, majoration, minoration …)

1) $u_n = \frac{n}{2} + \frac{8}{n}$
2) $u_n = \frac{30n}{25+n^2}$