Convergence de suites

Suites définies en fonction de n : $u_n = f(n)$

Les méthodes valables pour les fonctions restent valables

Théorèmes de convergence

Le plus utile :

Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Remarques

- Le minorant ou le majorant n'est pas forcément égal à la limite. Une suite croissante majorée par 5 peut avoir une limite égale à 5 mais aussi à 4 ou à 3 …

- Bien lire les énoncés car il y a un modèle type : 1) montrer que la suite est croissante 2) montrer que la suite est majorée 3) montrer que la suite est convergente.

Exemple

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2+\frac{1}{n^2}$

1) Montrer que la suite est décroissante
2) Montrer que la suite est minorée par 2
3) En déduire que la suite est convergente

Solution :

1) Posons $f(x) = 2+\frac{1}{x^2}$ alors $f'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$ si $x > 0$ donc f est décroissante si $x > 0$.
   Or $n > 0$, et $n < n + 1$ donc $f(n) > f(n + 1)$ et $u_n > u_{n+1}$, la suite est donc décroissante
2) $\frac{1}{n^2} > 0$ donc $2+\frac{1}{n^2} > 2$ et la suite est minorée par 2
3) La suite est décroissante, minorée par 2 donc elle converge.

Toute suite croissante non majorée tend vers l'infini

Une suite géométrique de raison comprise entre – 1 et 1 tend vers 0

Comment traiter les QCM

Beaucoup d'exercices avec des suites sont sous la forme de QCM qui nécessitent de connaître des contre-exemples. Il faut donc s'entrainer toute l'année et se faire une petite liste que l'on apprendra par cœur. Bien souvent, ces contre-exemples pourront servir pour les fonctions en remplaçant le n par x. D'ailleurs, il est souvent plus facile de raisonner en s'aidant des fonctions (courbes) puis de revenir aux suites.

Exemple 1

Répondre par vrai ou faux et justifier

Une suite bornée converge

Faux : $u_n = \sin n$

Rappels :

- Les limites dans les suites se font toujours en + infini
- Diverge = ne converge pas c'est-à-dire n'a pas de limite ou tend vers l'infini

Exemple 2
Répondre par vrai ou faux et justifier

Si (u_n) diverge alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$converge vers 0

Faux : $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite donc diverge et $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ n'a pas de limite non plus donc diverge également

Comment déterminer la limite d'une suite

Toutes les techniques vues avec les fonctions fonctionnent (théorème du gendarme entre autre)
Quand **on sait que** la suite converge, on peut utiliser le théorème du point fixe

Exemple
Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1) Montrer qu'elle est majorée par 4
2) Montrer que la suite est croissante
3) En déduire que la suite est convergente
4) Déterminer sa limite

Solution :

1) On va montrer qu'elle est majorée par 4 en utilisant un raisonnement par récurrence.
   Initialisation : $u_0 = 4$ donc vrai
   Hérédité : (HR) supposons $u_n \leq 4$ au rang n
   Alors $3u_n + 4 \leq 16$ et $\sqrt{3u_n + 4} \leq \sqrt{16}$ donc $u_{n+1} \leq 4$
   On a donc bien $u_n \leq 4$ pour tout n
2) Calculons $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 4 - {u_n}^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{-(u_n - 4)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$. Par définition de la suite, $u_n > 0$ et par la question 1), on a $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite est croissante
3) Puisque la suite est croissante et majorée par 4 alors elle converge.
4) La suite est convergente, de plus $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ est continue donc on peut utiliser le théorème du point fixe. Soit ℓ la limite de la suite alors : $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$. On résout l'équation et on obtient : $l^2 - 3l - 4 = 0$ donc ℓ = - 1 ou 4 . La suite est positive donc – 1 ne peut pas être solution. La limite est donc 4.

Exercices

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$

1) Montrer que cette suite est majorée par 6
2) Montrer que cette suite est croissante
3) En déduire que cette suite converge
4) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est géométrique .En déduire la limite de (u_n)

Convergence de suites

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n}$

1) Montrer que pour tout n > 0, on a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$
2) Etudier le sens de variations de la suite et en déduire qu'elle converge
3) Montrer que pour tout n, $u_n = \cos\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)$. En déduire la limite de cette suite

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{9}{u_n}\right)$

1) Montrer que la suite est minorée par 3
2) Etudier les variations de la suite, en déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n{}^2 + \frac{1}{8}$

1) Montrer que cette suite est positive, décroissante et convergente
2) Déterminer sa limite

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{3+2u_n}{2+u_n}$

1) Montrer que $u_n > 0$ pour tout n > 0
2) Montrer que la suite est majorée par $\sqrt{3}$
3) Etudier le sens de variation de la suite
4) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$. Montrer que cette suite est géométrique et en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$

1) Placer dans un repère orthonormé d'unité 4 cm, sur l'axe des abscisses, les quatre premiers termes de la suite sans effectuer aucun calcul
2) Montrer que $2 \leq u_n \leq 3$ pour tout n, que la suite est croissante et convergente.
3) Déterminer la limite de cette suite

Exercice 7

Répondre par vrai ou faux :

1) La suite $\left(\cos\frac{1}{n+1}\right)$ diverge
2) Pour toutes suites réelles (u_n) et (v_n) strictement positives :
   a) si (u_n) et (v_n) sont décroissantes alors (u_nv_n) est croissante

b) si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors $(u_n+ v_n)$ est monotone
c) (u_nv_n) ne peut converger vers 0
d) si (u_n) converge vers 2 et (v_n) est croissante alors $(u_n+ v_n)$ est croissante
e) si pour tout n , $u_n \geq 1$ et (u_n) décroissante alors (u_n) converge vers 1 .

3) Si pour tout n, $u_n - 3 \leq \frac{1}{n+1}$ alors (u_n) converge vers 3
4) Si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ alors (u_n) converge.
5) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ alors (u_n) converge.
6) Si (u_n) converge vers 0 alors (u_n) est une suite croissante négative ou décroissante positive
7) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}$. Alors (u_n) est croissante
8) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) qui vérifient $u_n \leq v_n$
   a) si (u_n) diverge alors (v_n) diverge
   b) si (v_n) est bornée alors (u_n) est majorée
   c) si (v_n) est décroissante alors (u_n) est majorée
   d) si (v_n) est convergente alors (u_n) est majorée
   e) si (v_n) est convergente alors (u_n) est convergente .
9) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle est majorée
10) Si (u_n) est positive et strictement croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Exercice 8

Partie A

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1) Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq M$. Montrer que pour tout entier naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq M$.
2) Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?
3) Enoncer le théorème du cours ainsi démontré

Partie B

Répondre par vrai ou faux en justifiant chaque réponse

1) Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$
2) Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$
3) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée
4) Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante

Exercice 9

Répondre par vrai ou faux en justifiant les réponses

1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs positives. Si pour tout entier n, $v_n \geq u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{{v_n}^2}{u_n} = +\infty$
2) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$ la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1