Corrigé variations de suites

Exercice 1

1) $u_n = \frac{3}{n^2}$. Soit f(x) = $\frac{3}{x^2}$ alors f ’(x) = $-\frac{6}{x^3} < 0$ si x > 0.
Donc f est décroissante si x > 0, or n < n + 1 donc f(n) > f (n+1) et $u_n > u_{n+1}$.
La suite est donc décroissante
2) $u_n = \sqrt{3n+1}$. Soit f(x) = $\sqrt{3x+1}$ alors f ’(x) = $\frac{3}{2\sqrt{3x+1}} > 0$, f croissante
Or n < n + 1, f croissante donc f(n) < f (n + 1) et $u_n < u_{n+1}$, la suite est croissante
3) $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$. Soit f(x) = $\frac{2x-1}{x+4}$ alors f ’(x) = $\frac{2(x+4)-2x+1}{(x+4)^2} = \frac{9}{(x+4)^2} > 0$
La fonction f est donc croissante et puisque n < n + 1 alors f(n) < f (n + 1)
d’où $u_n < u_{n+1}$ et la suite est croissante.
4) $u_n = \frac{1}{1+n^2}$. Soit f(x) = $\frac{1}{1+x^2}$ alors f ’(x) = $-\frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0$ si x > 0
La fonction f est décroissante, comme n < n + 1 alors f(n) > f (n + 1) et $u_n > u_{n+1}$ donc la suite est décroissante
5) $u_n = n!$. Calculons $u_{n+1} - u_n = (n+1)! - n! = n!(n+1-1) = nn! > 0$ donc la suite est croissante
6) $u_{n+1} = u_n - 3$. Calculons $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ donc la suite est décroissante
7) $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$. c’est une suite géométrique et $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Donc les signes de cette suite s’alternent et la suite n’est pas monotone.
8) $u_{n+1} = 2u_n$. C’est une suite géométrique et $u_n = 2^n > 0$. Calculons $u_{n+1} - u_n = u_n > 0$ donc la suite est croissante
9) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$. Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}} + 1 > 0$ donc la suite est croissante
10) $u_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times ... \times \frac{2n-1}{2n}$ > 0. Calculons alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ donc la suite est décroissante
11) $u_n = n^3 - 2n^2 - n$. Calculons $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 1 - 4n - 2 - 1 = 3n^2 - n - 2$
Etudions le signe de $3n^2 - n - 2$: $\Delta = 25$ donc $3n^2 - n - 2 > 0$ sur $]1;+\infty[$. Donc la suite est croissante à partir du rang n = 1
12) $u_{n+1} = u_n{}^2$. Soit la fonction f(x) = x² alors f est croissante si x > 0. Or $u_n > 0$
Initialisation : $u_0 = \frac{8}{7}$ et $u_1 = \frac{64}{49}$ d’où $u_0 < u_1$
Hérédité : (HR) supposons $u_n \le u_{n+1}$ au rang n
Puisque f est croissante, alors $f(u_n) \le f(u_{n+1})$ c'est-à-dire $u_{n+1} \le u_{n+2}$
On a donc $u_n \le u_{n+1}$ pour tout n
La suite est donc croissante
13) $u_n = 2n + \sin n$. Soit f(x) = 2x + sin x alors f ’(x) = 2 + cos x > 0 donc f est croissante
Or n < n + 1 donc f(n) < f (n + 1) et $u_n < u_{n+1}$ et la suite est croissante

Corrigé variations de suites

Exercice 2

1) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 8$: $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^n < 1$ donc $-8 < u_n < -7$: la suite est bornée
2) $u_n = 5\sin(5n+1) - 3$: $-5 \le 5\sin(5n+1) \le 5$ donc $-8 \le u_n \le 2$: la suite est bornée
3) $u_n = \frac{n^2+1}{n^2+5}$. On sait que n > 0 et de plus n² + 1 < n² + 5 donc $0 \le u_n \le 1$: la suite est bornée
4) $u_n = \frac{3n+1}{n+1}$. On a 3n ≥n donc 3n + 1 ≥n+1 donc $u_n \geq 1$. De plus, $u_n = 3 - \frac{2}{n+1}$, et $\frac{2}{n+1} > 0$ donc $u_n < 3$. La suite est bornée

Exercice 3

1) Initialisation : $u_0 = 1 > 0$
   Hérédité : (HR) supposons $u_n > 0$ au rang n
   Alors $u_n + \frac{1}{u_n} > 0$ et donc $u_{n+1} > 0$
   Donc $u_n > 0$ pour tout n
2) Calculons : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ par la question 1 donc la suite est croissante

Exercice 4

$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$

1) Initialisation $-1+\sqrt{2} \le 1 \le 1$ donc vrai au rang n = 0
   Hérédité : Posons f(x) = $\frac{x+1}{x+3}$, alors f ’(x) = $\frac{2}{(x+3)^2} > 0$ donc f est croissante.
   De plus f(1) = $\frac{1}{2}$ et $f(-1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{2} = \sqrt{2} - 1$
   (HR) supposons $-1+\sqrt{2} \le u_n \le 1$ au rang n
   Puisque f est croissante alors : $f\left(-1+\sqrt{2}\right) \le f(u_n) \le f(1)$
   Donc $-1+\sqrt{2} \le u_{n+1} \le \frac{1}{2} \le 1$
   On a donc $-1+\sqrt{2} \le u_n \le 1$ pour tout n
2) Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+1}{u_n+3} - u_n = \frac{-u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n+3}$
   Par la question 1) : $u_n + 3 > 0$; étudions le signe de $-u_n^2 - 2u_n + 1$, $\Delta = 8$
   On a : $-u_n^2 - 2u_n + 1 > 0$ sur $\left]-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right[$ donc par la question 1)
   $-u_n^2 - 2u_n + 1 < 0$ et donc la suite est décroissante.

Exercice 5

$u_n = \dfrac{2n+1}{3n-1}$

Première méthode

Calculons $u_n - \dfrac{3}{2} = \dfrac{2n+1}{3n-1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-5n+5}{2(3n-1)} = \dfrac{5(1-n)}{2(3n-1)} < 0$ si n > 1 donc la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{3}{2}$ à partir du rang n = 1

Deuxième méthode

Posons f(x) = $\dfrac{2x+1}{3x-1}$ alors f ’(x) = $\dfrac{2(3x-1)-3(2x+1)}{(3x-1)^2} = \dfrac{-5}{(3x+1)^2} < 0$ donc la fonction f est décroissante. De plus, f(1) = $\dfrac{3}{2}$

Or n > 1, donc f(n) < f(1) et $u_n < \dfrac{3}{2}$ et donc la suite est majorée par $\dfrac{3}{2}$ à partir du rang n = 1

Exercice 6

$u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{u_n}{u_n+2}$

Etudions le signe de $u_n - 2 = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc $u_n \geq 2$

De la même façon : $u_n - 3 = \dfrac{-n}{n+1} < 0$ donc $u_n \leq 3$

Commençons par calculer $v_n = \dfrac{2n+3}{n+1} \times \dfrac{n+1}{4n+5} = \dfrac{2n+3}{4n+5}$

Etudions le signe de $v_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2n+3}{4n+5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2(4n+5)} > 0$ donc $v_n \geq \dfrac{1}{2}$

Et maintenant : $v_n - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2n+3}{4n+5} - \dfrac{3}{5} = \dfrac{-2n}{5(4n+5)} < 0$ donc $v_n \leq \dfrac{3}{5}$

Exercice 7

1) $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3$. Montrons par récurrence que 0,5 < u_n < 5 pour tout n

   Initialisation : u_0 = 5, vrai

   Hérédité : supposons 0,5 < u_n < 5 au rang n

   Alors : $-2{,}5 < -\dfrac{1}{2}u_n < -0{,}25$

   Donc $0{,}5 < u_{n+1} < 2{,}75 < 5$

   On conclut donc que la suite est bornée par 0,5 et 5

2) $u_n = \dfrac{(-1)^n n + \cos n}{1+n}$

   On sait que : $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $-n \leq (-1)^n n \leq n$ d’où : $-\dfrac{1+n}{1+n} \leq u_n \leq \dfrac{1+n}{1+n}$ d’où

   $-1 \leq u_n \leq 1$

Exercice 8

1) $u_n = \frac{n}{2} + \frac{8}{n}$. On pose f(x) = $\frac{x}{2} + \frac{8}{x}$ alors f ’(x) = $\frac{1}{2} - \frac{8}{x^2} = \frac{x^2 - 16}{2x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{2x^2}$

On en conclut donc, que si x > 4, f est croissante

Soit n > 4 alors n < n + 1 et f(n) < f (n + 1) donc $u_n < u_{n+1}$ et la suite est croissante à partir du rang n = 4

On a donc automatiquement que $u_n > u_4 = 4$ donc la suite est minorée par 4

2) $u_n = \frac{30n}{25 + n^2}$. On pose f(x) = $\frac{30x}{25 + x^2}$

alors f ’(x) = $\frac{30(25 + x^2) - 60x^2}{(25 + x^2)^2} = \frac{30(25 - 2x^2)}{(25 + x^2)^2} = \frac{30(5 - \sqrt{2}x)(5 + \sqrt{2}x)}{(25 + x^2)^2}$

f est donc décroissante si $x > \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Soit n > 3, alors n < n + 1 et f(n) > f (n + 1) donc $u_n > u_{n+1}$ et la suite est décroissante à partir du rang 3

On a automatiquement $u_n < u_3 = \frac{45}{17}$ donc la suite est majorée

De plus n > 0, donc $u_n > 0$ et la suite est minorée

La suite est donc bornée