Corrigé convergence de suites

Exercice 1

$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = -2$

1) Initialisation : $-2 < 6$ donc vrai au rang n = 0
   Hérédité : supposons $u_n \leq 6$ au rang n
   Alors : $\frac{1}{2}u_n + 3 \leq \frac{1}{2} \times 6 + 3$ donc $u_{n+1} \leq 3$
   Donc $u_n \leq 6$ pour tout n
2) Calculons $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n > 0$ si $u_n \leq 6$ donc la suite est croissante
3) La suite (u_n) est croissante majorée par 6 donc elle converge
4) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_n - 6} = \frac{u_n - 6}{2(u_n - 6)} = \frac{1}{2}$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et
   $v_n = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $u_n = v_n + 6 = -8\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$. Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc
   $\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$

Exercice 2

$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n}$ et $u_0 = 0$

1) Initialisation : vrai au rang n = 0 car $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0 \leq 1$

   Hérédité : supposons $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$ au rang n

   Alors $\frac{\sqrt{2}+2}{2} \leq u_n + 1 \leq 2$

   Et $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$

   D'où : $\sqrt{\frac{2\left(\sqrt{2}+2\right)}{8}} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{2}$

   Ce qui donne : $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. Or $2+\sqrt{2} \geq 2$ donc $\sqrt{2+\sqrt{2}} \geq \sqrt{2}$ et on a bien
   $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

   Donc $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout n
2) Calculons $u_{n+1} - u_n = \frac{(1+u_n) - 2u_n^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n} + u_n} = \frac{-2u_n^2 + u_n + 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+u_n} + u_n}$. Par la question 1) , le
   dénominateur est positif . Etudions le signe du numérateur : $\Delta = 9$ donc

$-2u_n{}^2+u_n+1\geq 0$ sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et donc par la question 1) , la suite est croissante .

La suite est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente .

3) On va montrer par récurrence que $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

Initialisation : $\cos\frac{\pi}{2}=0=u_0$ donc vrai pour le rang n = 0

Hérédité : supposons $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ au rang n

Alors $\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=\sqrt{1+2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)-1}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

par la formule cos (2a) = 2 cos² a – 1

Donc $u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

Et donc $u_n=\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout n

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 3

$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{9}{u_n}\right)$ et $u_0 = 4$

1) Montrons le par récurrence : initialisation , vrai pour n = 0 car 3 < 4
   Hérédité : (HR) supposons $3\leq u_n$ au rang n (*la minoration directe comme précédemment ne fonctionne pas ici car l'inverse 9/u_n donne une majoration et on ne peut rien conclure)*

   Alors posons f(x) = $\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$, on obtient f '(x) = $\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)=\frac{1}{2x^2}(x-3)(x+3)$

   La fonction est donc croissante si x > 3 et f(3) = 3

   Or par (HR) $3\leq u_n$ donc f(3) ≤ $f(u_n)$ donc $3\leq u_{n+1}$

   On a donc $3\leq u_n$ pour tout n

2) Montrons par récurrence que la suite est décroissante

   Initialisation : $u_0 = 4$ et u_1 = $\frac{25}{8}<4$ donc $u_0 > u_1$: vrai pour les deux premiers termes

   Hérédité : (HR) supposons $u_n\geq u_{n+1}$ au rang n

   D'après la question 1 , puisque f est croissante : $f(u_n)\geq f(u_{n+1})$ et donc $u_{n+1}\geq u_{n+2}$

   On a donc $u_n\geq u_{n+1}$ pour tout n

   La suite est donc décroissante , minorée par 3 donc elle converge . Posons m sa limite .
   La fonction f est continue car somme d'un polynôme et d'une fonction rationnelle donc en utilisant le théorème du point fixe on a : m = f(m) d'où à résoudre :

$\frac{1}{2}\left(m+\frac{9}{m}\right)=m$ c'est-à-dire : $-m^2+9=0$ donc m = 3 car la suite étant positive , sa limite ne peut pas être égale à – 3 . La suite converge donc vers 3

Exercice 4

$u_{n+1}=u_n^{\ 2}+\frac{1}{8}$ et $u_0 = \frac{1}{2}$

1) $u_0 > 0$ et $u_n^{\ 2}+\frac{1}{8}>0$ donc la suite (u_n) est positive

   Montrons que la suite (u_n) est décroissante : vrai pour les deux premiers termes .

   Posons f(x) = $x^2+\frac{1}{8}$ alors f '(x) = 2x et f est croissante si x > 0 .

   Supposons que $u_n \geq u_{n+1}$ alors $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ car $u_n > 0$ et donc $u_{n+1} \geq u_{n+2}$

   On a donc $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n et la suite est bien décroissante

   La suite est décroissante minorée par 0 donc elle converge .

2) Puisque la suite converge et que f est continue car polynôme , on peut utiliser le théorème du point fixe . Posons m la limite de la suite (u_n) . Alors : $m^2-m+\frac{1}{8}=0$.

   Calculons les racines : $\Delta=\frac{1}{2}$ et m' = $\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ ou m'' = $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$. La suite étant positive , on a m = $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 5

$u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{2+u_n}$ et u_0 = - 1

1) Initialisation : $u_1 = 1 > 0$

   Hérédité : (HR) supposons $u_n > 0$ au rang n

   Alors $u_{n+1}=\frac{3+2u_n}{2+u_n} > 0$

   Donc $u_n > 0$ pour tout n

2) Posons f(x) = $\frac{3+2x}{2+x}$ alors f '(x) = $\frac{1}{(2+x)^2}>0$ donc la fonction f est croissante .

   De plus : $f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{1}=6+\sqrt{3}-6=\sqrt{3}$

   Montrons par récurrence que la suite (u_n) est majorée par $\sqrt{3}$

   Initialisation : $u_0 < \sqrt{3}$

   Hérédité : (HR) supposons $u_n \leq \sqrt{3}$ au rang n .

   Alors puisque f est croissante on a : $f(u_n) \leq f\left(\sqrt{3}\right)$ d'où $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

   Donc $u_n \leq \sqrt{3}$ pour tout n

3) Montrons par récurrence que la suite (u_n) est croissante :

   Initialisation : $u_0 < u_1$ car – 1 < 1

Hérédité : (HR) supposons $u_n \le u_{n+1}$ au rang n

Puisque par la question 2 , f est croissante alors : $f(u_n) \le f(u_{n+1})$ et $u_{n+1} \le u_{n+2}$.

Donc $u_n \le u_{n+1}$ pour tout n et la suite est croissante

4) $$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}-\sqrt{3}}{u_{n+1}+\sqrt{3}} \times \frac{u_n+\sqrt{3}}{u_n-\sqrt{3}} = \frac{\frac{3+2u_n}{2+u_n}-\sqrt{3}}{\frac{3+2u_n}{2+u_n}+\sqrt{3}} \times \frac{u_n+\sqrt{3}}{u_n-\sqrt{3}} = \frac{3-2\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)u_n}{3+2\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{3}\right)u_n} \times \frac{u_n+\sqrt{3}}{u_n-\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+u_n\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+u_n\right)} \times \frac{u_n+\sqrt{3}}{u_n-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \times \frac{-\sqrt{3}+u_n}{\sqrt{3}+u_n} \times \frac{u_n+\sqrt{3}}{u_n-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

La suite est donc géométrique et $v_n = \frac{-1-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}\right) = -\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n}$

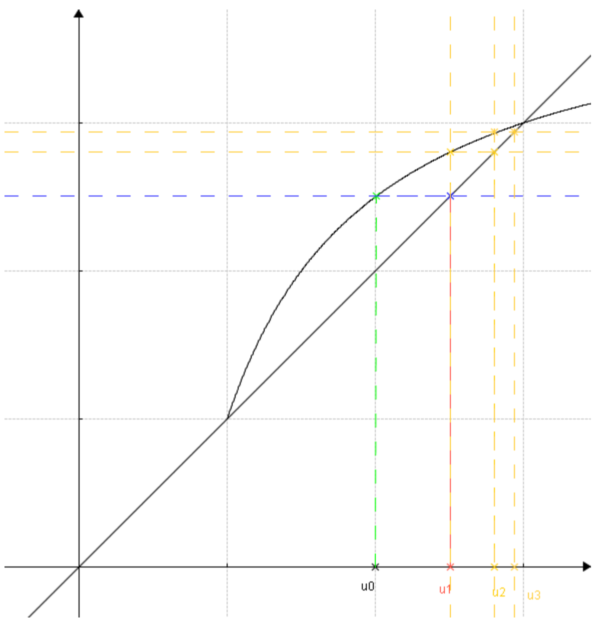
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\sqrt{3}\right)^{2n} = 0$ car $\left|2-\sqrt{3}\right| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

On sait que $v_n = \frac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$ donc $u_n = \frac{-\sqrt{3}(1+v_n)}{v_n-1}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$

Exercice 6

$u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$ et $u_0 = 2$.

1) On va tracer la courbe de la fonction f(x) = $4 - \frac{3}{x}$ et la droite d'équation y = x .



Ensuite on place $u_0 = 2$. On trouve u_1 en cherchant l'image de 2 par la fonction f (trait vert) : on obtient cette valeur en ordonnée . On reporte sur l'axe des abscisses en utilisant la première bissectrice : on porte cette valeur sur la droite d'équation y = x (trait bleu) et on descend sur l'axe des abscisses (trait rouge) . Ensuite , on reproduit la même méthode (traits jaunes) : ici , pour des raisons de place , le schéma est réduit mais il faut bien respecter l'unité de l'énoncé , donnée pour faciliter la construction .

2) On va montrer par récurrence : $2 \le u_n \le 3$

Initialisation : $2 \le u_0 \le 3$ car $u_0 = 2$

Hérédité : (HR) on suppose $2 \le u_n \le 3$ au rang n

Alors $\frac{1}{3} \le \frac{1}{u_n} \le \frac{1}{2}$ et $-\frac{3}{2} \le -\frac{3}{u_n} \le -1$

Donc $4-\frac{3}{2} \le 4-\frac{3}{u_n} \le 4-1$ et $2 \le \frac{5}{2} \le u_{n+1} \le 3$

On a bien $2 \le u_n \le 3$ pour tout n .

Calculons $u_{n+1}-u_n = 4-\frac{3}{u_n}-u_n = \frac{-u_n{}^2+4u_n-3}{u_n} = \frac{-(u_n-1)(u_n-3)}{u_n} > 0$ car $2 \le u_n \le 3$ donc la suite est croissante

La suite est croissante et majorée par 3 donc elle converge

3) La suite converge et la fonction f est continue comme fonction rationnelle donc on peut appliquer le théorème du point fixe . Soit m la limite de la suite .

Alors f(m) = m d'où à résoudre : $4-\frac{3}{m} = m$ c'est-à-dire : $m^2-4m+3=0$ ou $(m-3)(m-1)=0$. Il y a donc deux réponses possibles : m = 1 ou m = 3

Or $2 \le m \le 3$ par la question précédente donc m = 3 .

Exercice 7

1) Faux : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\lim\limits_{a\to 0} \cos a = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\frac{1}{n+1} = 1$
2) a) faux : ($u_n v_n$) est une suite croissante

$u_{n+1}v_{n+1}-u_n v_n = u_{n+1}(v_{n+1}-v_n)+u_{n+1}v_n-u_n v_n = u_{n+1}(v_{n+1}-v_n)+v_n(u_{n+1}-u_n) < 0$

b) faux car $u_{n+1}+v_{n+1}-u_n-v_n = u_{n+1}-u_n+v_{n+1}-v_n$: on ne peut pas déterminer le signe

c) faux : $u_n = \frac{1}{n+1} > 0$ et $v_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} = 0$

d) faux : $u_n = \frac{1}{n}+2$ et $v_n = -\frac{1}{n^2}+2$ alors $u_n+v_n = 4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2} = \frac{4n^2+n-1}{n^2}$ et cette suite est décroissante (étudier la fonction associée)

e) faux : $u_n = 3+\frac{1}{n}$ c'est une suite décroissante et $u_n \ge 1$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

3) faux : $u_n = -\frac{1}{n}$
4) vrai : (u_n) tend vers 0
5) faux : $u_n = u_0 - \frac{1}{2}n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
6) faux : $u_n = \frac{\sin n}{n}$ change de signe mais tend vers 0 (th des gendarmes)
7) vrai (récurrence avec la fonction associée)
8) a) faux : $u_n = \sin n$ diverge , $v_n = 2+\frac{1}{n} > 1 > \sin n$ et tend vers 2 donc converge

b) vrai : un majorant de v_n est aussi un majorant de u_n

c) vrai : $u_n < v_n < v_0$.

d) vrai : soit m la limite de la suite (v_n) , alors $v_n \in \left]m-a;m+a\right[$ et donc $u_n \le m+a$

e) faux : $u_n = -n$ et $v_n = \frac{1}{n}$

9) faux : $u_n = (-2)^n$

10) faux : $u_n = 3 - \frac{1}{n}$

Exercice 8

Partie A

1) On sait que la suite est croissante , donc puisque $n \geq n_0$ alors $u_n \geq u_{n_0} \geq M$
2) On a donc pour tout n , $u_n \in [M;+\infty[$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
3) Toute suite croissante non majorée tend vers + ∞

Partie B

1) Faux : $u_n = n\cos n$ n'a pas de limite mais n'est pas majorée
2) Faux : $u_n = 3 - \frac{1}{n}$ tend vers 3
3) Vrai : par définition , si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors pour tout réel M , on a $u_n \in [M;+\infty[$ et donc pour tout M , $u_n \geq M$, et la suite n'est pas majorée
4) Faux : $u_{2n} = 3^n$ et $u_{2n+1} = 2^n$

Exercice 9

1) Vrai : $v_n \geq u_n$ donc $v_n{}^2 \geq u_n v_n$ et donc puisque $u_n > 0$, on a : $\frac{v_n{}^2}{u_n} \geq v_n \geq u_n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc par le théorème de majoration , $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n{}^2}{u_n} = +\infty$
2) Faux : $u_n = n+1$ et $v_n = n^2 + 1$