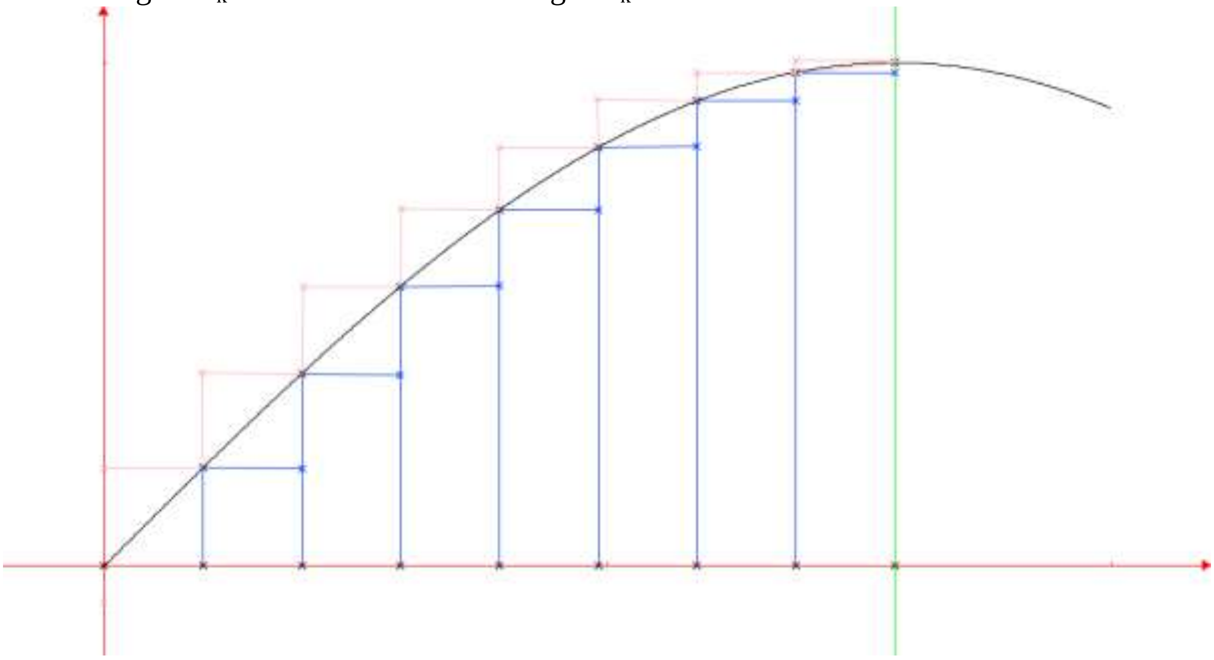
Corrigé des suites adjacentes

Partie A

Si n = 3 , k varie de 0 à 8 et $a_k = \dfrac{k\pi}{16}$ donc $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{\pi}{16}$, $a_2 = \dfrac{2\pi}{16} = \dfrac{\pi}{8}$, … , $a_8 = \dfrac{\pi}{2}$

D'où la figure :

Les rectangles R_k sont en bleu et les rectangles r_k sont en rose



Partie B

1) Il y a $2^n - 1$ rectangles R_k
2) Commençons par déterminer l'aire d'un rectangle quelconque R_k . On dit clairement dans la construction que R_k est de hauteur $\sin(a_k)$ et la largeur étant

   $a_{k+1} - a_k = \dfrac{(k+1)\pi}{2^{n+1}} - \dfrac{k\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ on a donc l'aire d'un rectangle égale à

   $\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$

   On a donc $U_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \dfrac{\pi}{2^{n+1}}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$ (on peut partir de k = 1 ou de k = 0 car pour k = 0 , la valeur est 0)

   On peut un peu simplifier : $U_n = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$

3) $U_{n+1} = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2^{n+2}}\right) = \dfrac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sin 0 + \sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}} + \sin\dfrac{2\pi}{2^{n+2}} + \sin\dfrac{3\pi}{2^{n+2}} + \ldots + \sin\dfrac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right)$

$$U_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{2^{n+2}} + \ldots + \sin\frac{2(2^{n+1}-2)\pi}{2^{n+2}} + \sin\frac{\pi}{2^{n+2}} + \sin\frac{3\pi}{2^{n+2}} + \ldots + \sin\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$U_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k)\pi}{2^{n+2}} + \sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

4) On a 2k + 1 > 2k donc $\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}} \geq \sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k)\pi}{2^{n+2}}$ donc

$U_{n+1} \geq \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(2\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k)\pi}{2^{n+2}}\right)$ ou encore $U_{n+1} \geq \frac{\pi}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}$ c'est-à-dire

$U_{n+1} \geq U_n$ pour tout n entier non nul

Partie C

1) Par le même raisonnement que dans la partie B :

$V_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}$.

2) On écrit alors

$$V_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{(2k)\pi}{2^{n+2}} + \sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right) \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{(2k)\pi}{2^{n+2}} + \sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(2k+2)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

$$V_{n+1} \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\frac{(k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)$$

$V_{n+1} \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$ donc $V_{n+1} \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(2\sum_{k=1}^{2^n}\sin\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$ c'est-à-dire

$V_{n+1} \leq V_n$ pour tout entier n non nul

Partie D

On pose $W_n = \sum_{k=1}^{2^n} e^{\frac{ik\pi}{2^{n+1}}}$: c'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\frac{i\pi}{2^{n+1}}}$ d'où :

$$W_n = e^{\frac{i\pi}{2^{n+1}}}\left(\frac{1-\left(e^{\frac{i\pi}{2^{n+1}}}\right)^{2^n}}{1-e^{\frac{i\pi}{2^{n+1}}}}\right) = e^{\frac{i\pi}{2^{n+1}}}\left(\frac{1-e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{\frac{i\pi}{2^{n+2}}}\left(e^{-\frac{i\pi}{2^{n+2}}} - e^{\frac{i\pi}{2^{n+2}}}\right)}\right) = e^{\frac{i\pi}{2^{n+2}}}\left(\frac{1-i}{-2i\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right)$$

$$W_n = \frac{(1+i)}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+2}} + i\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

Or $V_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}\operatorname{Im}(W_n) = \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} + \cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right) = \left(\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}\right)\left(\sin\frac{\pi}{2^{n+2}} + \cos\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$

Posons x = $\frac{\pi}{2^{n+2}}$ alors $\lim_{n\to+\infty} x = 0$ et $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ et $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} V_n = 1$

La limite commune des deux suites est donc 1

Par le théorème des gendarmes , A = 1