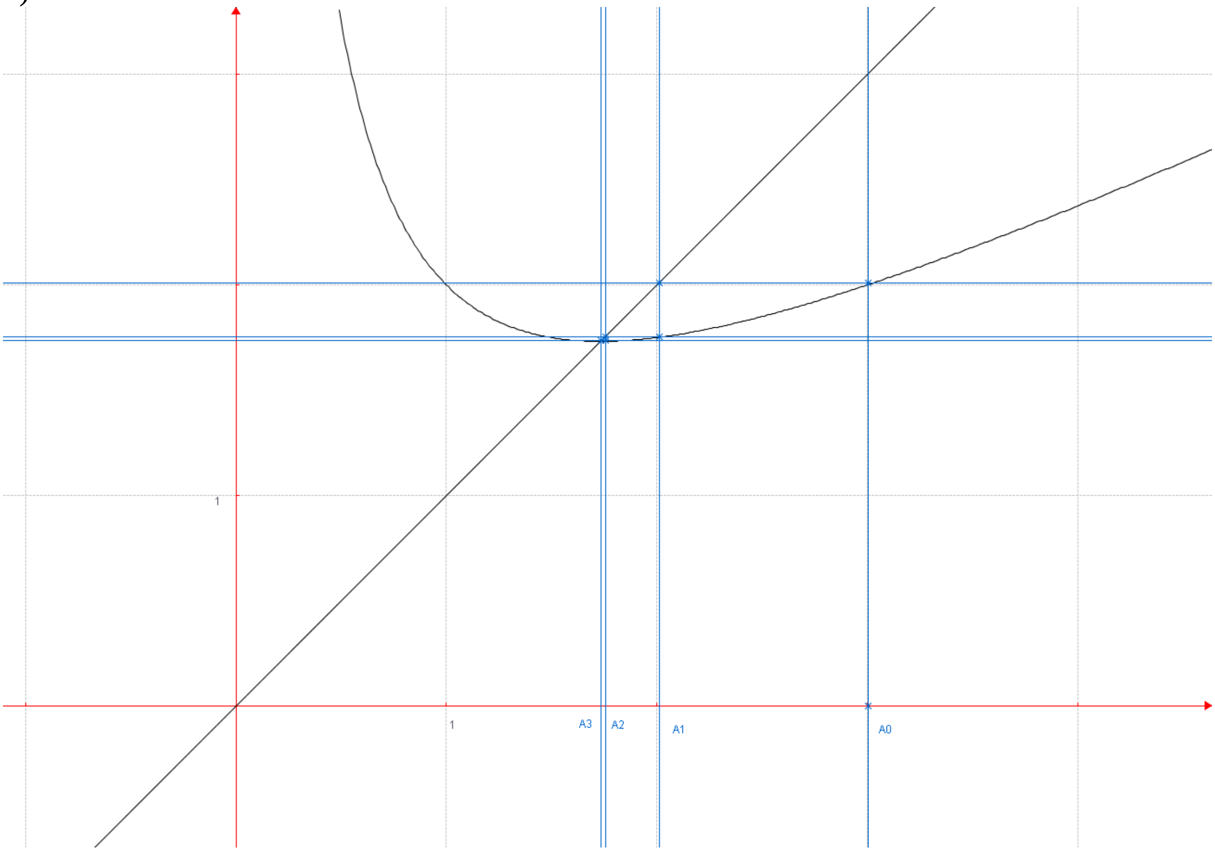
Corrigé exercice indispensables des suites

1) a) La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables
$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{x^2}\right)=\frac{1}{2x^2}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$. On travaille avec x > 0 donc f ' est du signe de $x-\sqrt{3}$ et f '(x) > 0 sur $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$ et f est donc croissante sur $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]0;\sqrt{3}\right[$. De plus , on remarque que $f\left(\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}$. Donc f(x) ≥ $\sqrt{3}$ pour tout x > 0

0,5 point

b)



Il était demandé de mettre les points sur l'axe des abscisses
0,5 point pour la courbe de f
0,5 point pour la famille des points A

c) Il semble que la suite tende vers $\sqrt{3}$

0,5 point

2) a) Soit la propriété : $u_n \geq \sqrt{3}$ pour tout n

Initialisation : $u_0 = 3 \geq \sqrt{3}$; la propriété est donc vraie pour n = 0

Hérédité : supposons que $u_n \geq \sqrt{3}$ au rang n et montrons qu'alors $u_{n+1} \geq \sqrt{3}$

On a $u_n \geq \sqrt{3}$, et la fonction f est croissante sur $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$ donc $f(u_n) \geq f\left(\sqrt{3}\right)$ et donc $u_{n+1} \geq \sqrt{3}$

Conclusion : $u_n \geq \sqrt{3}$ pour tout n

0,5 point

b) $f(x)-x=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x^2}{x}\right)=\frac{1}{2x}\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)$, or x > 0 donc f(x) – x est du signe de $\sqrt{3}-x$. On a donc : C est au dessus de Δ sur $\left]0;\sqrt{3}\right[$, C coupe Δ en x = $\sqrt{3}$ et C en dessous de C sur $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$

0,5 point

c) On a f(x) – x < 0 sur $\left]\sqrt{3};+\infty\right[$, or on a montré que $u_n \geq \sqrt{3}$. Donc : $f(u_n)-u_n<0$ soit $u_{n+1}-u_n<0$ et donc la suite (u_n) est décroissante

0,5 point

d) La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{3}$ donc elle converge .

On ne sait pas que $\sqrt{3}$ est la limite !!!!

0,5 point

3) On a f fonction continue car dérivable ; $u_{n+1}=f(u_n)$; et la suite converge

Le théorème du point fixe nous donne alors L = f(L)

0,5 point

La résolution de l'équation est équivalente à l'équation :

$f(x)-x=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x^2}{x}\right)=\frac{1}{2x}\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)=0$ et donc L = $\sqrt{3}$

0,5 point