Les indispensables sur les suites

Les formules et théorèmes indispensables

Les définitions

Une suite converge si elle a une limite finie
Une suite diverge si elle n'a pas de limite ou si sa limite est infinie
On cherche toujours la limite d'une suite quand n tend vers $+\infty$

Les grands théorèmes de convergence

Toute suite croissante majorée converge
Toute suite décroissante minorée converge
Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$

Le théorème du point fixe (hors programme mais utile)

Soit une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec une fonction f continue . Si on sait que la suite converge vers ℓ alors f(ℓ) = ℓ

Théorème des gendarmes

Soient trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ et les suites (u_n) et (w_n) convergentes vers la même limite L , alors (v_n) converge vers L .

Suites arithmétiques et géométriques

Une suite (u_n) est arithmétique à partir du rang n_0 s'il existe un réel r tel que , pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Une suite (u_n) est géométrique à partir du rang n_0 s'il existe un réel q tel que , pour tout entier $n \geq n_0$, $u_{n+1} = q\, u_n$.

	Terme général en fonction de n	Somme
Suite arithmétique	$u_n = u_0 + n \times r$ $= u_1 + (n-1) \times r$	$\frac{(premier + dernier) \times nbre.termes}{2}$
Suite géométrique	$u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1}$	$1er.terme \times \left(\frac{1 - q^{nbre.termes}}{1-q} \right)$

Une suite géométrique de raison comprise entre – 1 et 1 converge vers 0

Les indispensables sur les suites

Pense-bête

Variations d'une suite

Quand on demande d'étudier les variations d'une suite , on demande de regarder si elle est croissante ou décroissante . On parle aussi de monotonie de la suite . On peut toujours étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Parfois , l'étude est simple

Parfois , il faut passer par une récurrence avec une fonction f qu'on a étudiée avant .

Dans le cas particulier où la suite est positive , on peut aussi regarder si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur ou inférieur à 1

Il y a une fiche méthode qui développe le principe

Majoration ou minoration

Pour montrer qu'une suite (u_n) est majorée (ou minorée)par A on étudie le signe de $u_n - A$

Parfois , on doit avoir recours à un raisonnement par récurrence .

Montrer qu'une suite est convergente

- Soit on calcule la limite directement
- Soit on utilise un théorème de convergence

Montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique

- Arithmétique : on calcule $u_{n+1} - u_n$ on doit trouver une constante : la raison
- Géométrique : on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ on doit trouver une constante : la raison

Des contre-exemples pratiques

Une suite bornée qui ne converge pas : $(-1)^n$

Une suite divergente qui ne tend pas vers ∞ : $(-1)^n$

Une suite croissante qui ne tend pas vers $+\infty$: $-\frac{1}{n}$

Une suite qui tend vers $+\infty$ et qui n'est pas croissante : $\begin{cases} u_{2n} = 2^n \\ u_{2n+1} = 3^{n+1} \end{cases}$

Une suite non majorée qui ne tend pas vers $+\infty$: $(-2)^n$

Analyser un énoncé

Si on demande une construction des premiers termes , attention à l'échelle ! Toujours tracer la droite d'équation y = x et ne pas oublier de mettre les termes de la suite sur l'axe des abscisses

Des exemples ne sont pas des démonstrations

L'expression « montrer que pour tout n » cache souvent un raisonnement par récurrence

Ne pas se laisser intimider par les notations

Faire attention au vocabulaire : les fonctions et les suites n'ont pas tout à fait le même

Chercher toujours les questions indépendantes ou auxquelles on peut répondre sans avoir fait les précédentes mais en les lisant bien .

Exemple

Lire cet énoncé en l'annotant :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \end{cases}$

1) a) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par f(x) = $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$. Etudier le sens de variations de f et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. (On prendra comme unités graphiques 2 cm)

   b) Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 de l'axe $(O;\vec{i})$ d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

2) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , $u_n \geq \sqrt{3}$

   b) Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à la droite d'équation y = x

   c) En déduire que la suite (u_n) est décroissante

   d) Montrer que la suite (u_n) converge

3) Soit L la limite de la suite (u_n) . Montrer que L est solution de l'équation

   $x = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$

En déduire sa valeur

Solution

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \end{cases}$

4) a) Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par f(x) = $\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$. Etudier le sens de variations de f on calcule la dérivée et on étudie le signe en justifiant . Pas de limites , elles ne sont pas demandées et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. (On prendra comme unités graphiques <u>2 cm</u>)

   b) Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0 , A_1 , A_2 et A_3 de l'axe $(O;\vec{i})$ d'abscisses respectives u_0 , u_1 , u_2 et u_3 . la droite y = x et on met bien les u sur les abscisses

5) a) Montrer que <u>pour tout entier naturel</u> n non nul , $u_n \geq \sqrt{3}$ récurrence

   b) Etudier la position relative de la courbe de f par rapport à la droite d'équation y = x signe de f(x) – x

   c) <u>En déduire</u> que la suite (u_n) est décroissante récurrence avec $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

   d) Montrer que la suite (u_n) converge décroissante c) + minorée a)

6) Soit L la limite de la suite (u_n) . Montrer que L est solution de l'équation

   $x = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{3}{x}\right)$ th du point fixe

En déduire sa valeur résoudre l'équation