Suites et approximation d'aire

Partie A

1) Construire précisément la courbe C de la fonction f(x) = sin x sur I = $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dans un repère orthogonal d'unité graphique 5 cm sur l'axe des ordonnées et en choisissant 8 cm pour $\frac{\pi}{2}$ unités sur l'axe des abscisses.
2) On note A l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe C sur I et l'axe des abscisses. Pour n un entier naturel non nul, on pose $a_k = \frac{k\pi}{2^{n+1}}$ avec $0 \le k \le 2^n$. On construit pour k allant de 0 à $2^n - 1$, sur chaque intervalle $[a_k ; a_{k+1}]$ les rectangles R_k de hauteur $\sin(a_k)$ et les rectangles r_k de hauteur $\sin(a_{k+1})$. Faire la figure pour n = 3

Partie B

1) Soit n un entier naturel non nul, dans le cas général, combien y a-t-il de rectangles R_k ?
2) Déterminer la somme U_n des aires des rectangles R_k
3) Montrer que $U_{n+1} = \frac{\pi}{2^{n+2}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{2^{n+2}}\right) + \sum_{k=0}^{2^n-1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\right)$
4) En déduire que $U_{n+1} \ge U_n$ pour tout entier naturel n non nul

Partie C

1) Déterminer la somme V_n des aires des rectangles r_k
2) Montrer que $V_{n+1} \le V_n$ pour tout n non nul

Partie D

On admet que pour tout n non nul, $U_n \le A \le V_n$.
Déterminer la limite de (U_n) et de (V_n)
En déduire A