1 Premières propriétés des nombres premiers

A retenir

Tout entier naturel non premier strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier .

Le principe

On utilise la disjonction des cas et un raisonnement de l'absurde .

La démonstration

Soit n un entier non premier alors n admet des diviseurs . Appelons d le plus petit .

- Si d est premier , la propriété est vérifiée
- Supposons d non premier . Alors , d admet un diviseur k tel que $k < d$. Mais k est aussi un diviseur de **n** et on a une contradiction avec le fait que d doit être **le plus petit diviseur de n** . Donc d premier .

A retenir

Tout entier naturel non premier supérieur à 2 admet au moins un diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$

Le principe

On utilise la propriété précédente et des encadrements .

La démonstration

Soit n un entier naturel non premier . Alors par la propriété précédente , n admet au moins un diviseur premier, appelons p le plus petit . Et on a : $2 \leq p \leq n$ et $n = kp$
Puisque p est le plus petit diviseur de n et que k est aussi un diviseur de n , on a : $p < k$ et donc $p^2 < kp \iff p^2 < n$

A retenir

Il existe une infinité de nombres premiers

Le principe

On va supposer que cet ensemble est fini , le lister et fabriquer un nombre avec ces éléments . Puis on va montrer que ce nombre est premier mais ne fait pas partie de l'ensemble de départ .

La démonstration

- Supposons que l'ensemble E des nombres premiers est fini . On peut alors dire que $E = \{p_1; p_2; ...; p_n\}$.
- Posons $p = p_1p_2...p_n + 1$. On va montrer que p est premier et que p n'est égal à aucun des éléments de E . On aura ainsi prouvé que les éléments de E ne sont pas tous les nombres premiers . Et l'hypothèse de départ est donc fausse .
  - Montrons que p est premier . Pour cela , on procède par l'absurde . Supposons p non premier . Alors , il existe i tel que p_i divise p . Or p_i divise $p_1p_2...p_n$ donc p_i divise $p - p_1p_2...p_n = 1$. Impossible . Donc p est premier .
  - Montrons que p n'est égal à aucun p_i . On reprend le même genre de raisonnement . Supposons qu'il existe i tel que $p = p_i$ alors p_i divise $p - p_1p_2...p_n = 1$. Impossible donc p n'est pas un des éléments de E
- Conclusion : l'ensemble des nombres premiers est infini .

2 Décomposition en produits de nombres premiers

A retenir

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est soit premier , soit produit de facteurs premiers .

Le principe

On utilise la première propriété puis on itère le processus

La démonstration

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

- Premier cas : n est premier .
- Deuxième cas : n n'est pas premier alors il existe au moins un diviseur premier de n . Appelons le d_1 . Alors il existe k_1 tel que $n = d_1k_1$
  - Si k_1 est premier , alors la propriété est démontrée .
  - Si k_1 n'est pas premier , alors il existe au moins un diviseur premier d_2 et un entier k_2 tel que $k_1 = d_2k_2$ et donc $n = d_1d_2k_2$.
  - On itère ainsi ce processus
- Pourquoi y a t-il une fin à cette construction ? Quand on aura épuisé tous les diviseurs , le dernier quotient sera égal à 1 . Et donc on s'arrête .