Chapitre 3 : Suites de matrices , démonstrations .

1 Puissances de matrices

> *A retenir*
>
> Soit A une matrice diagonale . Alors A^n est la matrice diagonale dont les coefficients sont égaux aux puissances nèmes des coefficients de A

Le principe

On procède par récurrence

La démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Initialisation : $A^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 0 & 0 \\ 0 & b^1 & 0 \\ 0 & 0 & c^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = A$ qui est bien diagonale donc la propriété est vraie au rang 1

Hérédité : Supposons que pour un n donné , on a : $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$.

Alors , $A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} a^n a + 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^n b + 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^n c + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{n+1} \end{pmatrix}$

Conclusion : pour tout n entier naturel non nul , $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$

Chapitre 3 : Suites de matrices , démonstrations .

2 Diagonalisation de matrices

> *A retenir*
> Si $A = PDP^{-1}$ alors $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout n entier naturel

Le principe

On procède par récurrence

La démonstration

Initialisation : $A^1 = PD^1P^{-1}$ donc vrai au rang 1

Hérédité : supposons que pour un n donné $A^n = PD^nP^{-1}$.

Alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ car $P^{-1}P = I_n$.

Conclusion : pour tout entier naturel n non nul , $A^n = PD^nP^{-1}$

> *A retenir*
> Pour que $AX = kX$ avec X non nulle , il faut que $det(A - kI) = 0$

La démonstration

$AX = kX \iff AX - kX = 0 \iff (A - kI)X = 0$

X est non nulle , or si on peut diviser par $A - kI$, X sera nulle . Donc on ne doit pas pouvoir inverser $A - kI$. Il faut donc que $A - kI$ ne soit pas inversible et donc que $det(A - kI) = 0$

Chapitre 3 : Suites de matrices , démonstrations .

A retenir

Soit A une matrice carrée de taille 2 . A est diagonalisable si et seulement s'il existe m et n réels tels que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sachant que $AU = mU$ et $U = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $AV = nV$ et $V = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. U et V n'étant pas proportionnelles

Le principe

On démontre l'implication puis la réciproque

La démonstration

- Supposons A diagonalisable . Alors il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

  P est inversible donc $det(P) \neq 0 \iff ad - bc \neq 0$.

  On peut donc poser $U = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, U et V ne seront pas proportionnelles .

  Montrons maintenant que $AU = mU$

  $P^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donc $P^{-1}U = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} da - bc \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $DP^{-1}U = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} m(da - bc) \\ 0 \end{pmatrix}$

  et enfin $PDP^{-1}U = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} am(da - bc) \\ cm(da - bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am \\ cm \end{pmatrix} = mU$

  On démontre de même que $AV = nV$

- Supposons que $D = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sachant que $AU = mU$ et $U = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $AV = nV$ et $V = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, U et V non proportionnelles . On pose $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On va montrer que $A = PDP^{-1}$.

  U et V n'étant pas proportionnelles , $detP \neq 0$ donc P est inversible .

  On calcule $PDP^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} amd - bcn & -abm + ban \\ mdc - dcn & -bmc + and \end{pmatrix}$

  Puisque $AU = mU$ et $AV = nV$, on obtient deux systèmes :

  $\begin{cases} xa + yc = ma \\ xb + yd = nb \end{cases}$ et $\begin{cases} tc + za = mc \\ td + zb = nd \end{cases}$.

On les résout et on trouve : $x = \dfrac{amd - bcn}{ad - bc}$, $y = \dfrac{amb - abn}{ad - bc}$, $z = \dfrac{mdc - dcn}{ad - bc}$ et $t = \dfrac{and - bmc}{ad - bc}$

Ce qui prouve bien que $A = PDP^{-1}$

3 Suites arithmético-géométriques

A retenir

Pour étudier une telle suite , on commence par chercher c tel que $c = ac + b$ puis on démontre que la suite $v_n = u_n - c$ est géométrique de raison q . Alors $u_n = (u_0 - c) \times q^n + c$

La démonstration

Posons $u_{n+1} = au_n + b$

$c = ac + b \iff c = \dfrac{b}{1-a}$

$u_{n+1} - c = au_n + b - ac - b = a(u_n - c)$ donc $u_n - c$ est une suite géométrique de raison a et donc $u_n - c = (u_0 - c)a^n$