Exercices classe calcul matriciel

Exercice 1

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.

En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.

On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.

On estime que, chaque année :

- *12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.*
- *86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.*

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- *A est l'évènement: l'abonné est chez l'opérateur Alpha ;*
- *B est l'évènement: l'abonné est chez l'opérateur Bravo*

1. *Dessiner ce graphe probabiliste.*

   On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.

   On note pour tout entier naturel n :

   - a_n *la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année* $2015 + n$ *;*
   - b_n *la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année* $2015 + n$.

   On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ *la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année* $2015 + n$.

2. *Donner* a_0 *et* b_0.
3. *Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.*
4. *Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note* $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ *l'état stable de la répartition des abonnés.*

   (a) *Montrer que les nombres x et y sont solutions du système* $\begin{cases} 0,12x - 0,14y & = & 0 \\ x + y & = & 1. \end{cases}$

   (b) *Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.*

   (c) *Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.*

Exercice 2

Un parti politique organise une élection en son sein pour désigner son candidat à l'élection présidentielle. Seuls les adhérents de ce parti peuvent voter à cette élection et ils ont le choix entre deux candidats A et B.

Pendant la campagne électorale, certains adhérents indécis changent d'avis.

Un institut de sondage consulte chaque mois le même échantillon d'adhérents et recueille leurs intentions de vote.

Il observe que l'évolution de l'état de l'opinion peut être modélisée de la façon suivante.

Chaque mois :

- *5 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat A le mois précédent changent d'avis et déclarent vouloir voter pour le candidat B.*
- *3 % des adhérents ayant déclaré vouloir voter pour le candidat B le mois précédent déclarent vouloir voter pour le candidat A.*

Au début de la campagne électorale, 65 % des adhérents déclarent vouloir voter pour le candidat A. On représente ce modèle par un graphe probabiliste $(\mathcal{G})$ *de sommets A et B où :*

- *A est l'évènement : l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A ;*
- *B est l'évènement : l'adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B .*

Dans la suite de l'exercice, on note:

- a_n *la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat A, le* n*-ième mois après le début de la campagne. On a donc* $a_0 = 0,65$ *.*
- b_n *la probabilité qu'un adhérent déclare vouloir voter pour le candidat B, le* n*-ième mois après le début de la campagne.*

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ *l'état probabiliste correspondant aux intentions de vote le* n*-ième mois après le début de la campagne. On a donc* $P_0 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$*.*

1. (a) *Dessiner le graphe probabiliste* $(\mathcal{G})$ *de sommets A et B.*

   (b) *Écrire la matrice de transition* M *associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.*

2. *Démontrer que* $P_l = \begin{pmatrix} 0,628 & 0,372 \end{pmatrix}$*.*

3. *On note* $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ *l'état stable associé à ce graphe.*

   (a) *Démontrer que les nombres* a *et* b *sont solutions du système*

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 0,05a - 0,03b & = & 0 \\ a + \quad b & = & 1 \end{array} \right. .$$

   (b) *Résoudre le système précédent.*

(c) *Interpréter dans le contexte de l'exercice la solution obtenue à la question* **3. b.**

4. (a) *Démontrer que, pour tout entier naturel* n*, on a* $a_{n+1} = 0,92a_n + 0,03$.

   (b) *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $v_n = a_n - 0,375$.
   Démontrer que la suite (v_n) *est une suite géométrique de raison* $q = 0,92$ *et préciser le premier terme.*

   (c) *Pour tout entier naturel* n*, exprimer* v_n *en fonction de* n *et en déduire que :* $a_n = 0,275 \times 0,92^n + 0,375$.

5. *La campagne électorale dure 11 mois. Si la modélisation de l'institut de sondage est valable, quel candidat sera probablement élu ? Justifier la réponse.*

Exercice 3

Pour l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement: Approfondissement ou Ouverture culturelle

Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.

La première semaine, 20 % des élèves de la classe ont choisi Approfondissement et tous les autres ont choisi Ouverture culturelle . On admet que, chaque semaine,

- *20 % des élèves ayant choisi Ouverture culturelle une certaine semaine s'inscrivent en Approfondissement la semaine suivante;*
- *30 % des élèves ayant choisi Approfondissement une certaine semaine s'inscrivent en Ouverture culturelle la semaine suivante.*

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines.
On interroge au hasard un élève de la classe et on suit son choix d'option au fil des semaines.

1. *On note* A *l'état L'élève a choisi Approfondissement et* B *l'état L'élève a choisi Ouverture culturelle .*

   (a) *Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets* A *et* B.

   (b) *Écrire la matrice de transition* M *associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.*

2. *On note* P_1 *la matrice traduisant l'état probabiliste de la première semaine. Ainsi* $P_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

   (a) *Donner la matrice* M^2 *puis déterminer la probabilité que l'élève ait choisi Approfondissement lors de la troisième semaine.*

   (b) *À long terme, quelle est la probabilité qu'un élève choisisse Approfondissement ?*

3. *Pour tout entier naturel non nul* n *on note:*

- a_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi Approfondissement lors de la n-ième semaine,
- b_n la probabilité que l'élève interrogé ait choisi Ouverture culturelle lors de la n-ième semaine.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,2.$$

4. *On admet que pour tout entier naturel n non nul, on a :*

$$a_n = 0,4 - 0,4 \times 0,5^n.$$

Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation suivante :

$$0,4 - 0,4 \times 0,5^n > 0,399.$$

5. (a) *Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n > 0,399$.*

Variables	*N est un entier naturel* *A est un nombre réel*
Initialisation	*Affecter à N la valeur 1* *Affecter à A la valeur 0,2*
Traitement	...... *Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,2$* ....
Sortie	*Afficher N*

(b) *Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*

Exercice 4

En 2016, un institut de sondage mène une enquête régionale sur la manière dont les particuliers paient leur assurance. Les assurés se répartissent en deux catégories distinctes :

- *la catégorie A, composée des assurés qui paient en agence ;*
- *la catégorie B, composée des assurés qui paient en ligne.*

En 2016, 92 % des assurés paient en agence.

On admet que, d'une année à l'autre, 4 % des assurés de la catégorie A passent à la catégorie B et que 1 % des assurés de la catégorie B passent à la catégorie A.

On suppose que le nombre d'assurés est constant et que chaque année un assuré fait partie d'une seule catégorie.

Pour tout entier naturel n, on considère l'année $(2016 + n)$ et on note :

- *a_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie A cette année-là,*
- *b_n la probabilité qu'un assuré, pris au hasard, soit de catégorie B cette année-là,*
- *P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,08 \end{pmatrix}$.*

1. *Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste.*
   On notera A l'état l'assuré est de catégorie A et B l'état l'assuré est de catégorie B .
2. *On admet que la matrice de transition M associée à cette situation est $M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.*
   (a) *Exprimer P_1 en fonction de M et de P_0.*
   (b) *En déduire la probabilité qu'un assuré soit de catégorie A en 2017. Arrondir le résultat au centième.*
3. *Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état stable du graphe.*
   (a) *Justifier que $\begin{cases} -0,04a + 0,01b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$.*
   (b) *Résoudre le système précédent. Quelle conclusion peut-on tirer quant à la répartition à long terme des assurés ?*
4. (a) *Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01$.*
   On admet que, pour tout entier naturel n, $a_n = 0,2 + 0,72 \times 0,95^n$ et que la suite (a_n) est décroissante.
   (b) *On souhaite déterminer au bout de combien d'années moins d'un assuré sur deux sera de catégorie A. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.*

Variables :	*A est un nombre réel* *N est un entier naturel*
Initialisation	*Affecter à A la valeur 0,92* *Affecter à N la valeur 0*
Traitement	*Tant que ....* *Affecter à N la valeur ....* *Affecter à A la valeur ....* *Fin Tant que*
Sortie	*Afficher ...*

   (c) *La proportion d'assurés de catégorie A va-t-elle devenir inférieure à 0,5 ? Si oui, à partir de quelle année ? Expliquer la démarche choisie.*

Exercice 5
On donne la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer B^n pour tout entier naturel n .

Exercice 6
On donne la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Déterminer* B^n *pour tout entier naturel n .*

Exercice 7
On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ *et on pose* $M = A - I_3$. *Calculer* M^2 . *En déduire que A est inversible et déterminer son inverse .*

Exercice 8
On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. *On pose* $A = 2I_3 + J$

1. *Déterminer J*
2. *Montrer* $J^2 = 3J$
3. *En déduire que* $J^n = 3^{n-1}J$ *pour tout entier naturel n non nul .*
4. *On rappelle la formule du binôme de Newton :* $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
   (a) *Montrer que* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} 2^{n-k} = \frac{5^n}{3}$
   (b) *Montrer que* $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} 2^{n-k} = \frac{5^n - 2^n}{3}$
   (c) *En déduire* A^n *pour tout entier n .*