Exercices classe divisibilité

Exercice 1

1. (a) *Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.*

   (b) *Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.*

2. (a) *Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :*
   $(10)^n \equiv 1\ (9)$.

   (b) *On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.*
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.

   (c) *En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.*

3. *On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :*

   - *B la somme des chiffres de A ;*
   - *C la somme des chiffres de B ;*
   - *D la somme des chiffres de C.*

   (a) *Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.*

   (b) *Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8,020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72180$.*

   (c) *Démontrer que $C \leqslant 45$.*

   (d) *En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.*

   (e) *Démontrer que $D = 7$.*

Exercice 2

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. *Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ et u_4.*

   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \quad (\text{modulo } 4)$.*

   En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \quad (\text{modulo } 4)$ et

   $u_{2k+1} \equiv 0 \quad (\text{modulo } 4)$.

3. (a) *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.*

   (b) *En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \quad (\text{modulo } 100)$.*

4. *Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.*

Exercice 3

1. *Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \mod 7$.*

2. *Soit a un entier naturel non divisible par 7.*

   (a) *Montrer que : $a^6 \equiv 1 \mod 7$.*

   (b) *On appelle* ordre *de $a \mod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \mod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \mod 7$.*
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k ?

   (c) *Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.*

3. *À tout entier naturel n, on associe le nombre*

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

   Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \mod 7$.

Exercice 4

1. *On considère l'ensemble $A_7 = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; \ 4 \ ; \ 5 \ ; \ 6\}$*

   (a) *Pour tout élément a de A_7 déterminer l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \quad (\text{modulo } 7)$.*

   (b) *Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 7)$ équivaut à $x \equiv 4 \quad (\text{modulo } 7)$.*

   (c) *Si a est un élément de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \quad (\text{modulo } 7)$ sont les multiples de 7.*

2. *Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ \ldots \ ; \ p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p. On admet que $a^{p-1} \equiv 1[p]$*

   (a) *Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.*

   (b) *On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \quad (\text{modulo } p)$.*

   (c) *Soient x et y deux entiers relatifs. On admet que $xy \equiv 0 \quad (\text{modulo } p)$ si et seulement si x est un multiple de p où y est un multiple de p.*
   Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations : $2x \equiv 1 (\text{modulo } 31)$ et $3x \equiv 1 \quad (\text{modulo } 31)$.
   À l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation
   $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 31)$.

Exercice 5
On note 0, 1, 2, ..., 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12. Par exemple :

$$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1\,711 \text{ en base } 10$$

1. (a) *Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 :*

$$N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$$

   Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

   (b) *Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 :*

$$N_2 = 1{,}131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$$

   Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, *un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 :*

$$N = \overline{a_n \cdots a_1 a_0}^{12}$$

2. (a) *Démontrer que $N \equiv a_0 \quad (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.*

   (b) *À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.*

3. (a) *Démontrer que $N \equiv a_n + \cdots + a_1 + a_0 \quad (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.*

   (b) *À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.*

4. *Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.*

Exercice 6
Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation : $7^n - 3 \times 2^m = 1$ (F).

1. *On suppose $m \leqslant 4$.*

   Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. *On suppose maintenant que $m \geqslant 5$.*

   (a) *Montrer que si le couple $(n,\ m)$ vérifie la relation (F) alors*
   $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.

(b) *En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple* $(n,\ m)$ *vérifie la relation (F) alors* n *est divisible par* 4.

(c) *En déduire que si le couple* $(n,\ m)$ *vérifie la relation (F) alors*
$7^n \equiv 1 \pmod 5$.

(d) *Pour* $m \geqslant 5$*, existe-t-il des couples* $(n,\ m)$ *d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?*

3. *Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).*