Exercices classe nombres premiers

Exercice 1

1. (a) *Calculer :* $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

   (b) *Que peut-on dire de* 847 *et* 342 *?*

2. *Soit* n *un entier naturel non nul. On note* a *et* b *les entiers naturels tels que :*

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

Que valent a_1 *et* b_1 *?*

D'après les calculs de la question **1. a.**, *donner d'autres valeurs de* a_n *et* b_n.

   (a) *Calculer* a_{n+1} *et* b_{n+1} *en fonction de* a_n *et* b_n.

   (b) *Démontrer que, si 5 ne divise pas* a_n+b_n, *alors 5 ne divise pas non plus* $a_{n+1}+b_{n+1}$. *En déduire que, quel que soit* n *entier naturel non nul, 5 ne divise pas* a_n+b_n.

   (c) *Démontrer que, si* a_n *et* b_n *sont premiers entre eux, alors* a_{n+1} *et* b_{n+1} *sont premiers entre eux.*
   En déduire que, quel que soit n *entier naturel non nul,* a_n *et* b_n *sont premiers entre eux.*

Exercice 2

1. (a) *Soit* p *un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres* p, $p+10$ *et* $p+20$, *et l'un seulement est divisible par 3.*

   (b) *Les entiers naturels* a, b *et* c *sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.*

2. *Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs* $(u,\ v,\ w)$ *tels que*

$$3u + 13v + 23w = 0.$$

   (a) *Montrer que pour un tel triplet* $v \equiv w \pmod 3$

   (b) *On pose* $v = 3k+r$ *et* $w = 3k'+r$ *où* k, k' *et* r *sont des entiers relatifs et* $0 \leqslant r \leqslant 2$. *Montrer que les éléments de E sont de la forme :*

$$(-13k - 23k' - 12r,\ 3k+r,\ 3k'+r).$$

   (c) *L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation* $3x+13y+23z=0$.
   Déterminer l'ensemble des points M *à coordonnées* $(x,\ y,\ z)$ *entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.*

Exercice 3

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant : Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ?

Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\dots1$ où 1 apparaît p fois.

On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. *Les nombres $N_2 = 11,\ N_3 = 111,\ N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?*
2. *Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?*
3. *On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.*

   On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

   (a) *On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.*
   Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

   (b) *On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.*
   Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

   (c) *On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.*
   En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. *Enoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier. Cette condition est-elle suffisante ?*

Exercice 4

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier. On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. *Montrer que a et b n'ont pas la même parité.*
2. *Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.*
3. *Quelle est la parité de p et de q ?*

Partie B

On admet que 250507 n'est pas premier. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant la relation

$$(E)\ :\quad a^2 - 250507 = b^2.$$

1. *Soit X un entier naturel.*
   (a) *Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.*
   (b) *Déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250507$.*
   Sachant que $a^2 - 250507 = b^2$, en déduire les restes possibles module 9 de a^2.
   (c) *Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.*
2. *Justifier que si le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\ ;\ b)$.*
3. *On suppose que le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E).*
   (a) *Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.*
   (b) *Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\ ;\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.*

Partie C

1. *Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.*
2. *Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?*
3. *Cette écriture est-elle unique ?*

Exercice 5

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. *Calculer u_1, u_2 et u_3.*
2. (a) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,*
   $3u_n = 10^{n+1} - 7$.
   (b) *En déduire, pour tout entier naturel n, l' écriture décimale de u_n.*
3. *Montrer que u_2 est un nombre premier.*

   On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.
4. *Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.*
5. (a) *Démontrer que, pour tout entier naturel n, $3u_n \equiv 4 - (-1)^n \quad (modulo 11)$.*
   (b) *En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.*
6. (a) *Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1 (modulo 17)$.*
   (b) *En déduire que, pour tout entier naturel k, u_{16k+8} est divisible par 17.*