Exercices classe suites de matrices

Exercice 1

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- *s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;*
- *s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.*

On appelle p_n *la probabilité de ne pas fumer le* n*-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et* q_n*, la probabilité de fumer le* n*-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.*
On suppose que $p_0 = 0$ *et* $q_0 = 1$.

1. *Calculer* p_1 *et* q_1.
2. *On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites* (p_n) *et* (q_n)*. Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :*

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) *et* (q_n) *?*

3. *On définit les matrices* M *et, pour tout entier naturel* n, X_n *par*

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}.$$

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ *et que, pour tout entier naturel* n,
$X_n = M^n \times X_0$.
On définit les matrices A *et* B *par* $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

(a) *Démontrer que* $M = A + 0,5B$.

(b) *Vérifier que* $A^2 = A$*, et que* $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n *strictement positif,* $A^n = A$ *et* $B^n = B$.

(c) *Démontrer que, pour tout entier naturel* n, $M^n = A + 0,5^n B$.

(d) *En déduire que, pour tout entier naturel* n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

(e) *À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?*

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. *On appelle* I *la matrice identité d'ordre 2.*

   Vérifier que $A^2 = A + 2I$.

2. *En déduire une expression de* A^3 *et une expression de* A^4 *sous la forme* $\alpha A + \beta I$ *où* α *et* β *sont des réels.*

3. *On considère les suites* (r_n) *et* (s_n) *définies par* $r_0 = 0$ *et* $s_0 = 1$ *et, pour tout entier naturel* n,

$$\begin{cases} r_{n+1} & = & r_n + s_n \\ s_{n+1} & = & 2r_n \end{cases}$$

   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = r_n A + s_n I$.

4. *Démontrer que la suite* (k_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $k_n = r_n - s_n$ *est géométrique de raison* -1.

   En déduire, pour tout entier naturel n, *une expression explicite de* k_n *en fonction de* n.

5. *On admet que la suite* (t_n) *définie pour tout entier naturel* n *par*

   $t_n = r_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$ *est géométrique de raison 2.*

   En déduire, pour tout entier naturel n, *une expression explicite de* t_n *en fonction de* n.

6. *Déduire des questions précédentes, pour tout entier naturel* n, *une expression explicite de* r_n *et* s_n *en fonction de* n.

7. *En déduire alors, pour tout entier naturel* n, *une expression des coefficients de la matrice* A^n.

Exercice 3

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.

Un individu sain *est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.*

Un individu malade *est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.*

Un individu guéri *est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.*

Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant:

- 5 % *des individus tombent malades;*
- 20 % *des individus guérissent.*

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. *Calculer a_1, b_1 et c_1.*

2. (a) *Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.*

   (b) *Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.*

   On admet que $c_{n+1} = 0,2b_n + c_n$.

   Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

   On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. (a) *Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.*

   On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

   (b) *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,*
   $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}\left(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n\right) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. (a) *Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \frac{1}{3}\left(0,95^n - 0,8^n\right)$*

   (b) *Déterminer la limite de la suite (b_n).*

   (c) *On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroit.*

   On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

   À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2** *(***à rendre avec la copie***), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).*

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en ***annexe 2****.*

Conclure.

Variables	:	$b,\ b',\ x,\ y$ *sont des réels*
		k *est un entier naturel*
Initialisation	:	*Affecter à* b *la valeur 0*
		Affecter à b' *la valeur* $0,05$
		Affecter à k *la valeur* 0
		Affecter à x *la valeur* $0,95$
		Affecter à y *la valeur* $0,8$
Traitement	:	*Tant que* $b < b'$ *faire :*
		Affecter à k *la valeur* $k+1$
		Affecter à b *la valeur* b'
		Affecter à x *la valeur* $0,95x$
		Affecter à y *la valeur* $0,8y$
		Affecter à b' *la valeur* $\cdots\cdots$
		Fin Tant que
Sortie	:	*Afficher* $\cdots\cdots$

	k	b	x	y	b'	*Test:* $b < b'$ *?*
Après le 7ème passage dans la boucle Tant que	7	$0,1628$	$0,6634$	$0,1678$	$0,1652$	*Vrai*
Après le 8ème passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9ème passage éventuel dans la boucle Tant que						

Exercice 4

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.

Ainsi, $a_0 = 300$ et $b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0,7a_n + 0,2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0,1a_n + 0,6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. (a) *Déterminer U_1.*

   (b) *Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.*

2. *On note I la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) *Calculer* $(I - M) \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   (b) *En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.*

   (c) *Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.*

3. *Pour tout entier naturel, on pose $V_n = U_n - U$.*

   (a) *Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.*

   (b) *En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.*

4. *On admet que, pour tout entier naturel n,*

$$V_n = \begin{pmatrix} \dfrac{-100}{3} \times 0,8^n - \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \\ \dfrac{-50}{3} \times 0,8^n + \dfrac{140}{3} \times 0,5^n \end{pmatrix}$$

   (a) *Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).*

   (b) *Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.*

Exercice 5

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

- *20 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont toujours à cette station.*

60 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.

- *10 % des vélos présents à l'heure $n-1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.*
- *Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.*

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.*
2. *Déterminer U_1 et U_2.*
3. *Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?*

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.

Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. *On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.*
   (a) *On désigne par V une matrice colonne à deux lignes.*
   Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.
   (b) *On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$.*
   En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$

2. *Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = V_n - V$.*

   (a) *Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.*

   (b) *On admet que :* – *pour tout entier naturel $n, W_n = M^n \times W_0$,*
   – *pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $M^n = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.*

   Calculer, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, V_n en fonction de n.

   (c) *Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?*