

1 Définition des nombres premiers

Exercice 1

Justifier que les nombres suivants sont composés :

1. 14751
2. Pour k entier : $6k + 2$
3. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $4^n - 1$
4. $10^{2011} + 1$

Exercice 2

Montrer que tout nombre premier impair différent de 3 est de la forme $6k + 1$ ou $6k + 5$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

1. Le nombre $2n^2 + 3n$ peut-il être premier ?
2. Est-il toujours premier ?
3. Pour quelles valeurs de n entier naturel non nul, le nombre $n^2 - 5n + 6$ est-il premier ?

Exercice 4

1. Montrer que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$:
2. Pour quelles valeurs de n , le nombre $n^3 - 27$ est-il premier ?

Exercice 5

Soient a et b entiers naturels. Montrer que si $a^2 - b^2$ est premier alors a et b sont consécutifs. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6

Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 tels que $a + b = p$ avec p premier

1. Montrer que a et b sont de parités différentes
2. Montrer que a et b sont premiers entre eux.

2 Décomposition en facteurs premiers

Exercice 7

1. Décomposer 144 en produits de facteurs premiers :
2. Combien 144 admet-il de diviseurs ?

Exercice 8

1. Décomposer 126 en produit de facteurs premiers :
2. En déduire la plus petite valeur de a telle que $126 \times a$ soit un carré d'entiers.
3. en déduire la plus petite valeur de b telle que $126 \times b$ soit un cube d'entiers.