1 Divisibilité

Question type

Déterminer n tels que $an + b$ divise $cn + d$

Méthode

On sait que $an + b$ divise $an + b$ et $cn + d$. On va donc trouver une combinaison des deux qui supprime les n . Ainsi , $an+b$ sera diviseur d'un nombre . On pourra trouver les valeurs possibles de n . On n'oubliera pas de vérifier que les valeurs trouvées répondent bien à la question

Exercice résolu

Déterminer les entiers naturels n tels que $n + 1$ divise $n + 13$:

- Combinaison linéaire qui annule les n : $n + 13 - (n + 1) = 12$.

- Les diviseurs de 12 sont 1, 2 , 3 ,4 , 6 et 12 .

- $n + 1$ doit être égal à ces diviseurs . On doit donc résoudre :
  $n + 1 = 1 \iff n = 0$
  ou $n + 1 = 2 \iff n = 1$
  ou $n + 1 = 3 \iff n = 2$
  ou $n + 1 = 4 \iff n = 3$
  ou $n + 1 = 6 \iff n = 5$
  ou $n + 1 = 12 \iff n = 11$

- On doit vérifier maintenant que les valeurs possibles de n fonctionnent , autrement dit , quand on remplace n par la valeur trouvée , est-ce que $n + 1$ divise bien $n + 13$ .En détail pour la première : si $n = 0$, alors $n + 1 = 1$ et $n + 13 = 13$ et 1 divise bien 13 . Donc la première valeur est acceptée . On les vérifie toutes . Dans cet exemple , elles sont toutes acceptées .

- Conclusion : Les valeurs de n cherchées sont 0 , 1 , 2 , 3 , 5 et 11 .

Attention

La phase de vérification est très importante car on ne travaille pas par équivalence . On peut donc trouver des valeurs qui divisent la combinaison linéaire mais pas les éléments qui la composent .
Exemple : 3 divise $2 + 4$ et pourtant 3 ne divise ni 2 , ni 4

2 Division euclidienne

Question type

Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $an+b$ par $cn+b$.

Méthode

On commence par écrire la division simple , par exemple $3n+5=3(n+1)+2$
Ensuite , on vérifie que le reste est positif . Si ce n'est pas le cas , on diminue le quotient pour pouvoir augmenter le reste .
Puis , on résout l'inéquation pour savoir si le reste est bien plus petit que le diviseur : ici , $2<n+1$
Enfin , on étudie les autres valeurs de n par disjonction des cas .

Exercice résolu

Soit n un entier naturel . Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$

- On a immédiatement : $7n+5=2(3n+1)+n+3$
- On doit avoir $n+3>0 \iff n>-3$. Pas de souci puisque n est un entier naturel .
- Il faut regarder maintenant pour quelles valeurs de n , $n+3<3n+1 \iff 2<2n \iff 1<n$. On peut donc conclure déjà que pour $n>1$, le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$ est $n+3$
- Etudions les autres valeurs de n par disjonction des cas :
  Si $n=1$, alors $12=4\times 3+0$ donc le reste est 0 .
  Si $n=0$, alors $5=1\times 5+0$ donc le reste est 0
- Conclusion : si $n>1$, le reste est $n+3$; sinon , le reste est 0 .

Attention

Ne pas oublier l'étape de disjonction s'il y a d'autres valeurs de n non traitées .

3 Congruences

Question type

Déterminer les restes de k^n dans la division euclidienne par a .

Méthode

On commence par calculer les puissances de k en utilisant les congruences pour en trouver une égale à 1 modulo a . Ensuite , on applique les propriétés des puissances .

Exercice résolu

Déterminer les différents restes possibles de la division euclidienne de 2^n par 17.

- On commence par chercher une valeur de n telle que $2^n \equiv 1$ [17] .
  On a : $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. Or on sait que $16 \equiv -1$ [17] et si on met -1 au carré , on trouve 1 !! Eurêka !
  $(2^4)^2 \equiv 1$ [17] donc 2^8 $equiv1$ [17]

- Maintenant , on passe aux puissances égales aux multiples de 8 :
  $(2^8)^k \equiv 1^k$ [8] et donc $2^{8k} \equiv 1$ [17] .

- Et les autres puissances :
  $2^{8k+1} = 2^{8k} \times 2 \equiv 2$ [17] .
  $2^{8k+2} = 2^{8k+1} \times 2 \equiv 4$ [17] .
  $2^{8k+3} = 2^{8k+2} \times 2 \equiv 8$ [17] .
  $2^{8k+4} = 2^{8k+3} \times 2 \equiv 16$ [17] $\equiv -1$ [17] .
  $2^{8k+5} = 2^{8k+4} \times 2 \equiv -2$ [17] $\equiv 15$ [17] .
  $2^{8k+6} = 2^{8k+5} \times 2 \equiv -4$ [17] $\equiv 13$ [17] .
  $2^{8k+7} = 2^{8k+6} \times 2 \equiv -8$ [17] $\equiv 9$ [17] .

- La conclusion , on liste les résultats :
  Le reste de la division euclidienne de 2^n par 17 est :
  Si $n = 8k$: 1 ; si $n = 8k + 1$: 2 ; si $n = 8k + 2$: 4 ; si $n = 8k + 3$: 8 ; si $n = 8k + 4$: 16 ; si $n = 8k + 5$: 15 ; si $n = 8k + 6$: 13 et si $n = 8k + 7$: 9 avec k entier relatif .

Attention

1. On peut utiliser les valeurs négatives pour faire les calculs avec les congruences (quand c'est plus simple) mais si la question demande un reste , faire attention de bien donner les réponses positives .

2. Ne pas négliger la rédaction . Passer directement de quelques calculs de puissances et généraliser directement les formules sans les étapes 2 et 3 est considéré comme une conjecture .