1 PGCD

Question type

Déterminer selon les valeurs de n , le PGCD de $a = cn + d$ et $b = en + f$

Méthode

Le PGCD de a et b divise toute combinaison linéaire de a et b . Donc on commence par déterminer une combinaison linéaire de a et b qui annule les n . Ensuite , on liste les valeurs possibles du PGCD et on regarde dans quelles conditions sur n , elles peuvent être réalisées .

Exercice résolu

Déterminer selon les valeurs de n , le PGCD de $a = 2n + 3$ et $b = 3n + 2$

- Combinaison linéaire qui annule les n : $3a - 2b = 5$.
- Les diviseurs de 5 sont 1 et 5 .
- Posons $d = PGCD(a; b)$ donc $d = 1$ ou $d = 5$
- Regardons pour quelles valeurs de n , on peut avoir $d = 5$. Pour cela , d étant diviseur de a et b , alors a et b doivent donc être multiples de 5 .
  - On peut utiliser plusieurs techniques . Par exemple , directement en posant $a = 5k$ mais ici , on ne pourra pas obtenir directement n à cause du coefficient 2 . Mais ça marche dans beaucoup de cas .
  - Ici , on va utiliser des tables de congruences :

n	0	1	2	3	4
$2n+3$	3	0	2	4	1
$3n+2$	2	0	3	1	4

On a immédiatement que $n = 1 + 5k$

- Conclusion : $PGCD(a; b) = 5$ si $n = 1 + 5k$ et $PGCD(a; b) = 1$ sinon .

Attention

Le PGCD divise toute combinaison linéaire . N'allez pas trop vite dans les conclusions
On n'a pas : $PGCD(a; b) = ka + k'b$.

Question type

Montrer que $PGCD(a;b) = PGCD(ka + k'b; na + n'b)$

Méthode

On montre que PGCD(a;b) divise $PGCD(ka + k'b; na + n'b)$ puis la réciproque . Pour cela , on utilise le fait qu'un diviseur commun à deux entiers divise leur PGCD .

Exercice résolu

Montrer que $PGCD(a;b) = PGCD(2a + b; 3a + b)$

- Posons les notations pour que la rédaction soit plus claire et plus simple : on note $d = PGCD(a;b)$ et $D = PGCD(2a + b; 3a + b)$
- Montrons que d divise D .
  - Montrons d'abord que d divise $2a + b$ et $3a + b$: Par définition , d divise a et d divise b donc d divise toute combinaison linéaire de a et b , donc d divise $2a + b$ et $3a + b$
  - d est donc diviseur commun à $2a + b$ et à $3a + b$ et par définition , il divise donc leur PGCD . Donc d divise D .
- Montrons maintenant que D divise d
  - Montrons d'abord que D divise a : On sait que D divise $2a + b$ et $3a + b$ donc D divise $3a + b - (2a + b) = a$.
  - Montrons de même que D divise b : D divise $3(2a + b) - 2(3a + b) = b$.
  - D est donc un diviseur commun à a et b donc D divise leur PGCD et on a D divise d
- D divise d et d divise D donc $D = d$.

Attention

Ce n'est pas vrai pour toutes les combinaisons linéaires de a et b .
Exemple : on pose $a = 2$ et $b = 3$ alors $PGCD(a;b) = 1$ et $PGCD(3a+2b; 6a+2b) = 6$.

Question type

Déterminer les couples d'entiers naturels (a;b) tels que $PGCD(a;b) = k$ et $a + b = p$

Méthode

Si $PGCD(a;b) = k$ alors il existe a' et b' premiers entre eux tels que $a = ka'$ et $b = kb'$. On obtient ainsi une égalité $a' + b' = n'$ et on liste tous les couples d'entiers dont la somme vaut n' en gardant seulement ceux qui sont bien premiers entre eux . Ensuite , on calcule a et b en multipliant parle PGCD . On vérifie que les couples obtenus sont bien solutions .

Exercice résolu

Déterminer tous les couples d'entiers naturels (a;b) tels que $a + b = 60$ et $PGCD(a;b) = 15$

- Puisque $PGCD(a;b) = 15$ alors il existe a' et b' entiers naturels premiers entre eux tels que $a = 15a'$ et $b = 15b'$.
- Simplification de la somme : $a + b = 60 \iff 15a' + 15b' = 60 \iff a' + b' = 4$.
- Comment peut-on trouver 4 en ajoutant deux entiers naturels ?
  $1 + 3 = 4$ ou $2 + 2 = 4$ ou $3 + 1 = 4$
- Les possibilités pour (a';b') sont donc (1;3) , (2;2) et (3;1)
- Mais on ne garde que des entiers premiers entre eux donc les possibilités pour (a';b') sont (1;3) et (3;1)
- On calcule a et b en multipliant a' et b' par le PGCD c'est à dire ici 15 ce qui donne pour (a;b) les couples (15;45) et (45;15)
- On vérifie que ces couples sont solutions : $15 + 45 = 60$ et $PGCD(15;45) = 15$
- Conclusion : les couples solutions sont donc (15;45) et (45;15) .

2 Bézout , Gauss

Question type

Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $an+b$ par $cn+b$.

Méthode

On commence par écrire la division simple , par exemple $3n+5 = 3(n+1)+2$
Ensuite , on vérifie que le reste est positif . Si ce n'est pas le cas , on diminue le quotient pour pouvoir augmenter le reste .
Puis , on résout l'inéquation pour savoir si le reste est bien plus petit que le diviseur : ici , $2 < n+1$
Enfin , on étudie les autres valeurs de n par disjonction des cas .

Exercice résolu

Soit n un entier naturel . Déterminer selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$

- On a immédiatement : $7n+5 = 2(3n+1)+n+3$
- On doit avoir $n+3 > 0 \iff n > -3$. Pas de souci puisque n est un entier naturel .
- Il faut regarder maintenant pour quelles valeurs de n ,
  $n+3 < 3n+1 \iff 2 < 2n \iff 1 < n$. On peut donc conclure déjà que pour $n > 1$, le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$ est $n+3$
- Etudions les autres valeurs de n par disjonction des cas :
  Si $n = 1$, alors $12 = 4 \times 3 + 0$ donc le reste est 0 .
  Si $n = 0$, alors $5 = 1 \times 5 + 0$ donc le reste est 0
- Conclusion : si $n > 1$, le reste est $n+3$; sinon , le reste est 0 .

Attention

Ne pas oublier l'étape de disjonction s'il y a d'autres valeurs de n non traitées .

3 Equations diophantiennes

Question type

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $ax + by = c$

Méthode

On vérifie d'abord que l'équation a des solutions (sait-on jamais !) . Puis on cherche une solution particulière . Ensuite , on utilise Gauss pour trouver y par exemple et on remplace pour trouver x . On vérifie .

Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $2x - 3y = 5$

- Commençons par trouver une solution particulière : $(u; v) = (1; -1)$
- Déterminons y : on a : $2x - 3y = 2u - 3v \iff 2(x - u) = 3(y - v)$.
  2 divise $3(y - v)$ mais puisque 2 et 3 sont premiers entre eux , alors par Gauss 2 divise $y - v$ donc il existe k entier relatif tel que $y - v = 2k$ ce qui donne $y = -1 + 2k$
- Cherchons x . Remplaçons dans l'équation :
  $2(x - u) = 3(y - v) \iff 2(x - u) = 3(2k) \iff x - u = 3k$ et $x = 1 + 3k$
- Puisque nous n'avons pas travaillé par équivalence , nous devons vérifier que $x = 1+3k$ et $y = -1 + 2k$ avec k entier relatif sont bien solutions de l'équation de départ : $2(1 + 3k) - 3(-1 + 2k) = 2 + 6k + 3 - 6k = 5$
- Conclusion : Les solutions cherchées sont donc $\{(1 + 3k; -1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}$

Attention

1. Si pour déterminer x , on utilise Gauss une deuxième fois , ce n'est a priori pas le même k . Il faut donc ensuite montrer que $k = k'$ en remplaçant dans l'équation .
2. Ne pas oublier la vérification , essentielle car on ne travaille pas par équivalences .