DS 3 spécialité maths première 8 novembre 2024

Exercice 1 (15 points)

Les deux parties sont indépendantes

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-8;2]$ par :
$f(x) = x^3 + 9x^2 + 11x - 21$
On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

Partie A

1. *Déterminer les réels a , b et c tels que :* $f(x) = (x+3)(ax^2 + bx + c)$

   Par identification , on obtient : $f(x) = (x+3)(x^2 + 6x - 7)$

2. *Résoudre :* $f(x) = 0 \iff x + 3 = 0$ *ou* $x^2 + 6x - 7 = 0$

   Donc $x = -3$ *ou* $x^2 + 6x - 7 = 0$

   Résolvons cette deuxième équation : $\Delta = 64$

   $x_1 = \dfrac{-6+8}{2} = 1$ *ou* $x_2 = \dfrac{-6-8}{2} = -7$

   $S = \{-3; -7; 1\}$

3. *Résoudre :* $f(x) < 0$

   Avec un tableau de signes , on obtient : $S =]-\infty; -7[\cup]-3; 1[$

4. *Déterminer les antécédents de -21 par f*

   On doit résoudre :

   $f(x) = -21 \iff x^3 + 9x^2 + 11x = 0 \iff x(x^2 + 9x + 11) = 0 \iff x = 0$ *ou* $x^2 + 9x + 11 = 0$

   $\Delta = 37$ *donc* $x_1 = \dfrac{-9+\sqrt{37}}{2}$ *ou* $x_2 = \dfrac{-9-\sqrt{37}}{2}$

   Les antécédents de -21 sont donc : 0 , $\dfrac{-9+\sqrt{37}}{2}$, $\dfrac{-9-\sqrt{37}}{2}$

5. *Tracer la courbe de f sur [-8;2]*

Partie B

1. *Déterminer la dérivée de f que l'on notera f'*

   $f'(x) = 3x^2 + 18x + 11$

2. *Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x*

   $\Delta = 192$ *donc les racines de f sont :* $x_1 = \frac{-18+8\sqrt{3}}{6} = -3 + \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ *et* $x_2 = -3 - \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

   Donc $f(x) > 0$ *sur* $]-\infty; -3-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}[\cup]-3+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}; +\infty[$ *et* $f(x) < 0$ *sur* $]-3-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}; -3+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}[$

3. *Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0*

   On sait que l'équation sera de la forme: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   $y = 11x - 21$

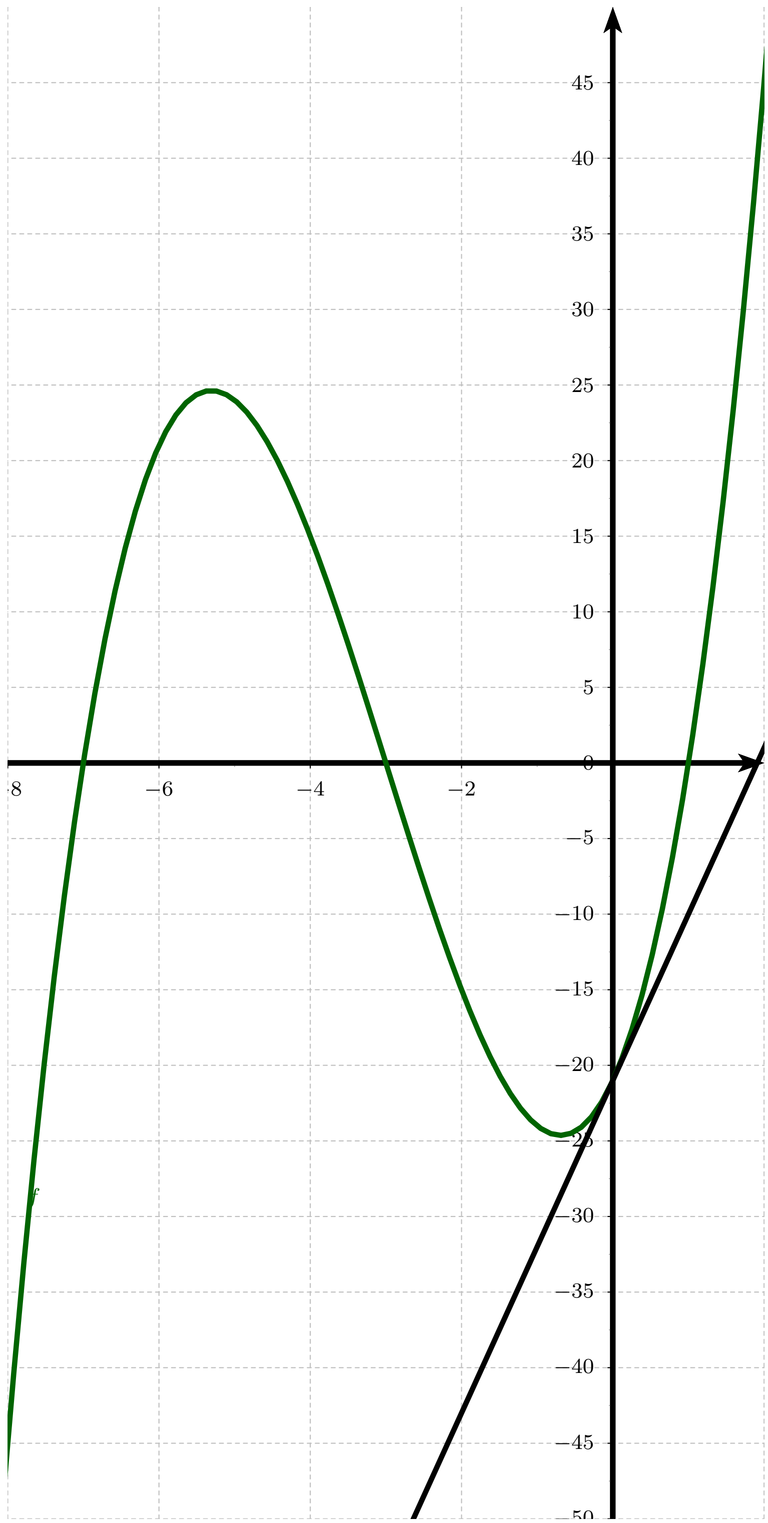
4. *Etudier la position relative de la courbe de f et de sa tangente*

   On va étudier le signe de $f(x) - (11x - 21) = x^3 + 9x^2 = x^2(x+9)$

   $x^2 \geq 0$ *donc c'est le signe de* $x + 9$ *qui donne le signe recherché*

   On a donc la courbe de f au-dessus de sa tangente sur $]-9;+\infty[$ *et en dessous sur* $]-\infty;-9[$

5. *Tracer T dans le graphique précédent*



Exercice 2 (5 points)

Les trois questions sont indépendantes

1. *Soit la suite géométrique* (u_n) *de raison 3 et de premier terme* $u_0 = 2$.

   (a) *Exprimer* u_n *en fonction de* n

$u_n = 2 \times 3^n$

(b) *Conjecturer la limite de* (u_n)

A l'aide de la calculatrice , il semble que la limite de la suite soit $+\infty$

2. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 4$ *et* $u_{n+1} = 3u_n + n - 5$. *Calculer* u_3

   $u_1 = 3(4) + 0 - 5 = 7$

   $u_2 = 3(7) + 1 - 5 = 17$

   $u_3 = 3(17) + 2 - 5 = 48$

3. *Soit la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = -1$ *et* $u_{n+1} = 0,5u_n + 2$. *Placer* u_0 , u_1 , u_2 *et* u_3 *sur l'axe des abscisses dans le graphique annexe en laissant apparents les traits de construction*