Exercice 1 (10 points)

On s'intéresse à une modélisation de la propagation de l'épidémie de la grippe en France durant l'hiver 2014 - 2015.

Les relevés statistiques, fournis par le réseau Sentinelle, du nombre de cas pour 100000 habitants sur la période du 29 décembre 2014 au 1er mars 2015 ont permis de mettre en évidence une courbe de tendance, à l'aide d'un tableur.

Soit f la fonction définie, pour tout $x \in [2\ ;\ 10]$, par

$$f(x) = -30x^2 + 360x - 360.$$

On admet que $f(x)$ modélise le nombre de malades déclarés pour 100000 habitants au bout de x semaines écoulées depuis le début de l'épidémie. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

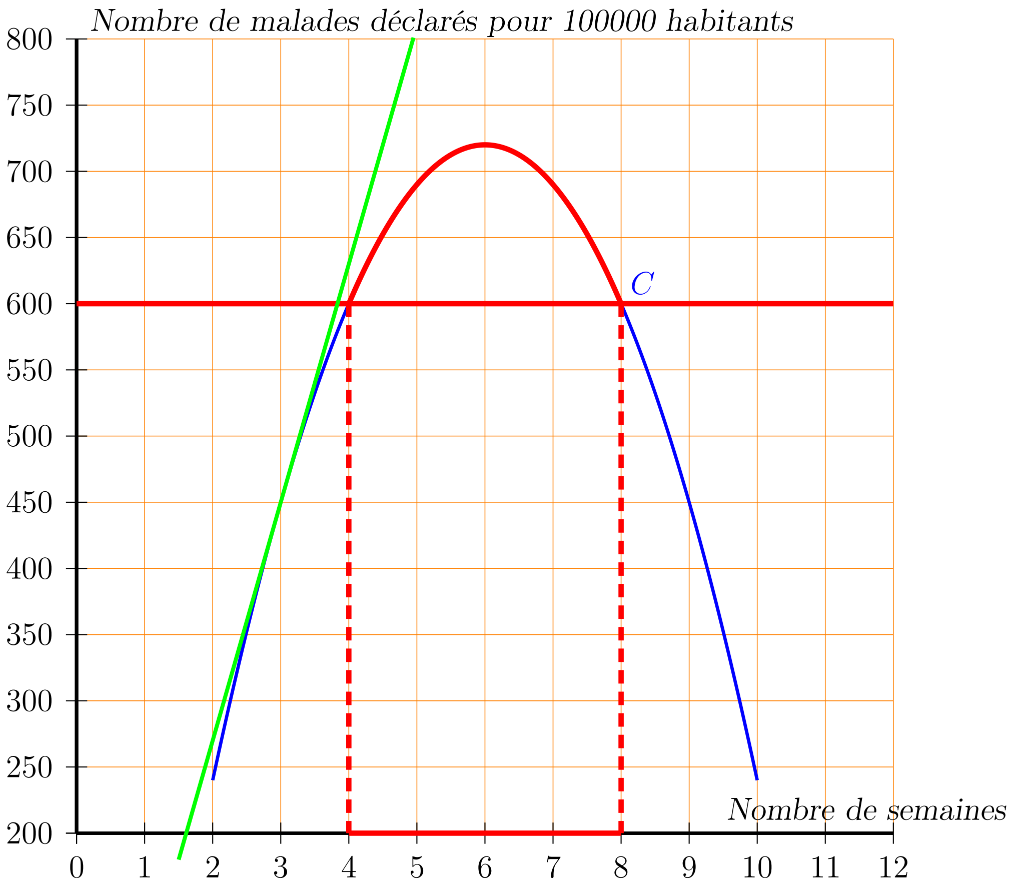
Partie A

À partir du graphique de l'annexe 2, répondre aux questions suivantes :

1. *Selon ce modèle, au bout de combien de semaines le pic de l'épidémie a-t-il été atteint ?*

   Le pic de l'épidémie semble atteint au bout de 6 semaines

2. *Déterminer le nombre de semaines pendant lesquelles le nombre de malades a été supérieur ou égal à 600. On laissera les traits de justification apparents sur le graphique de l'annexe 2, à rendre avec la copie.*



Entre la 4ème et la 8ème semaine soit

durant 4 semaines, le nombre de malades a été supérieur ou égal à 600

3. (a) *Montrer que* $f(x) \geqslant 600$ *équivaut à* $-x^2 + 12x - 32 \geqslant 0$.

   $f(x) \geqslant 600 \iff -30x^2 + 360x - 360 \geqslant 600 \iff -x^2 + 12x - 32 \geqslant 0$

   (b) *En déduire les solutions sur [2 ; 10] de l'inéquation* $f(x) \geqslant 600$.

   $-x^2 + 12x - 32$ *est de la forme* $ax^2 + bx + c$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 16 = 4^2$ *donc l'équation* $-x^2 + 12x - 32 = 0$ *admet deux solution distinctes*

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 8$ *et* $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 4$

   $a = -2 < 0$, *on en déduit que* $-x^2 + 12x - 32 \geqslant 0$ *sur* $[4\ ;\ 8]$

   Finalement $f(x) \geqslant 600 \iff x \in [4\ ;\ 8]$

   (c) *Comparer avec le résultat obtenu dans la question 2.*

   On retrouve le résultat de la question 2, à savoir que le nombre de malades est supérieur ou égal à 600 entre la 4ème et la 8ème semaine.

Partie B

1. (a) *Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle [2 ; 10] puis résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle.*

   $f(x) = -30x^2 + 360x - 360 \Longrightarrow$ *et* $f'(x) = -30 \times 2x + 360 \times 1$ *donc* $= -60x + 360$

   $f'(x) \geqslant 0 \iff -60x + 360 \geqslant 0 \iff x \leqslant 6$

   donc sur $[2\ ;\ 10]$, $f'(x) \geqslant 0 \iff 2 \leqslant x \leqslant 6$

   (b) *En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle [2 ; 10].*

x	2		6		10
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	240	$\nearrow$	720	$\searrow$	240

2. (a) *Calculer le nombre dérivé de f en 3.*

   $f'(3) = 180$

   (b) *Tracer la tangente à C au point d'abscisse 3 dans le repère de l'annexe 2.*

   Voir graphique la droite en vert.

   On part du point de coordonnées $(3\ ;\ 450)$ *sur la courbe puis on reporte la pente de 180 (on décale de 1 vers la droite et on monte de 180)*

3. *On admet que le réel $f'(x)$ représente la vitesse de propagation de l'épidémie au bout de x semaines.*

   La grippe se propage-t-elle plus vite au bout de 3 semaines ou de 4 semaines ?

   Justifier la réponse.

   La tangente au point d'abscisse 4 a un coefficient directeur plus petit que celui de la tangente au point d'abscisse 3.

   On en déduit que La grippe se propage plus vite au bout de 3 semaines.

Exercice 2 (10 points)

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2 %. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25 euros par an.

On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014 + n$.

Partie A

On considère l'algorithme ci-dessous :

Initialisation
Affecter à N la valeur 0
Traitement
Saisir une valeur pour C
Tant que $C < 2000$ faire
Affecter à N la valeur $N + 1$
Affecter à C la valeur $1,02C - 25$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

1. (a) *On saisit la valeur 1900 pour C. Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. beginenumerate*

   (b) i. *On saisit la valeur 1900 pour C. Pour cette valeur de C, on recopie et on complète le tableau, en suivant pas à pas l'algorithme précédent; les valeurs sont arrondies à l'euro:*

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Valeur de C	1900	1913	1926	1940	1954	1968	1982	1997	2012

   ii. *L'algorithme affiche la valeur 8.*
   Cela signifie qu'à partir de $n = 8$, c'est-à-dire de l'année $2014 + 8 = 2022$, la valeur du capital dépassera 2000 euros.

   (c) *Pour une valeur de C égale à 1250, comme $1250 \times 1,02 - 25 = 1250$, la valeur de C ne changerait pas dans l'algorithme et on ne sortirait jamais de la boucle* Tant Que.

Partie B

Valentine a placé 1900 euros à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1900$.

(a) *L'année $2014 + n$, le capital c_n produit 2 % d'intérêts, donc il devient l'année suivante $1,02c_n$; mais comme il y a 25 euros de frais, on peut dire que, pour tout n, $c_{n+1} = 1,02c_n - 25$.*

(b) *Soit (u_n) la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par $u_n = c_n - 1250$, donc $c_n = u_n + 1250$.*

   i. *Pour tout n de $\mathbb{N}$:*
   $u_{n+1} = c_{n+1} - 1250 = 1,02c_n - 25 - 1250 = 1,02(u_n + 1250) - 1275 = 1,02u_n + 1275 - 1275$
   $= 1,02u_n$
   $u_0 = c_0 - 1250 = 1900 - 1250 = 650$
   Donc la suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 650$ et de raison $q = 1,02$.

ii. *La suite* (u_n) *est géométrique de premier terme* $u_0 = 650$ *et de raison* $q = 1,02$ *donc, pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*:* $u_n = u_0 \times q^n = 650 \times 1,02^n$.
Et comme $c_n = u_n + 1250$*, on peut déduire que pour tout* n *de* $\mathbb{N}$*,* $c_n = 650 \times 1,02^n + 1250$.

(c) *Pour tout* n*,* $u_n > 0$*. Comme* $1,02 > 1$*, on déduit que* $1,02u_n > u_n$ *ce qui équivaut à* $u_{n+1} > u_n$ *et donc* $u_{n+1} - u_n > 0$.
Pour tout n*,* $c_{n+1} - c_n = u_{n+1} + 1250 - (u_n + 1250) = u_{n+1} + 1250 - u_n - 1250 = u_{n+1} - u_n > 0$
Donc la suite (c_n) *est croissante.*

(d) *On peut programmer la fonction* `650*1.02^X+1250` *sur la calculatrice et faire afficher le tableau de valeurs de cette fonction.*
il faut 14 années pour que la valeur du capital dépasse 2100 euros