Exercice 1 (10 points)
Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	*Saisir n entier positif*
Traitement :	*X prend la valeur 80 {Initialisation}* *Pour i allant de 1 à n* *Affecter à X la valeur $0,9X+20$* *Fin Pour* *X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur*
Sortie:	*Afficher X*

1. *Si on donne à n la valeur 2, la variable de boucle i prend successivement les deux valeurs $i=1$ puis $i=2$.*

   Avant d'entrer dans la boucle, on affecte à X la valeur 80.

   Quand $i=1$, on entre une fois dans la boucle et X prend la valeur $0,9\,X+20$ soit $0,9\times 80+20=92$.

   Quand $i=2$, on entre une deuxième fois dans la boucle et X prend la valeur $0,9\,X+20$ soit $0,9\times 92+20=102,8$.

   On sort de la boucle et X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur, soit 102.

   Pour la valeur $n=2$ saisie, la valeur affichée par l'algorithme est donc 102.

2. *L'année $n=2$ correspond à $2005+2=2007$.*
   Donc on peut supposer qu'en 2007 il y a 102 adhérents au club de randonnée.

Partie B

1. *On considère la suite (a_n) définie par $a_0=80$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0,9a_n+20$.*
   Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n=a_n-200$ donc $a_n=b_n+200$.

   (a) *Pour tout n, $b_{n+1}=a_{n+1}-200=0,9\,a_n+20-200=0,9\,(b_n+200)-180=0,9\,b_n+180-180=0,9\,b_n$*
   $b_0=a_0-200=80-200=-120$
   Donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q=0,9$ et de premier terme $b_0=-120$.

   (b) *D'après le cours, on peut dire que pour tout entier naturel n, $b_n=b_0\times q^n=-120\times 0,9^n$.*

2. *Pour tout n, $b_n=-120\times 0,9^n$; or $a_n=b_n+200$. Donc pour tout entier naturel n, $a_n=200-120\times 0,9^n$.*

3. *La suite (b_n) est géométrique de raison 0,9; or $0 < 0,9 < 1$ donc la suite (b_n) est convergente et a pour limite 0.*

   D'après les théorèmes sur les limites de suites, comme pour tout n, $a_n = b_n + 200$, on peut dire que la suite (a_n) est convergente et a pour limite 200.

Partie C

1. *On va résoudre l'inéquation en utilisant la calculatrice $a_n \geq 180$:*

   $a_n \geq 180 \iff 200 - 120 \times 0,9^n \geq 180 \iff 20 \geq 120 \times 0,9^n \iff \dfrac{20}{120} \geq 0,9^n$

   donc à partir de $n = 18$, a_n est supérieur à 180; l'objectif est donc réalisable.

   À la calculatrice, on trouve $a_{17} \approx 179,99$ et $a_{18} \approx 181,99$.

2. *Pour tout n, $a_n = 200 - 120 \times 0,9^n$ donc a_n est toujours inférieur à 200.*

   Donc l'objectif d'atteindre 300 adhérents est impossible.

Exercice 2 (10 points)

1. (a) *On lit $f(0) = 2$, $f'(0) = \dfrac{9}{1} = 9$;*

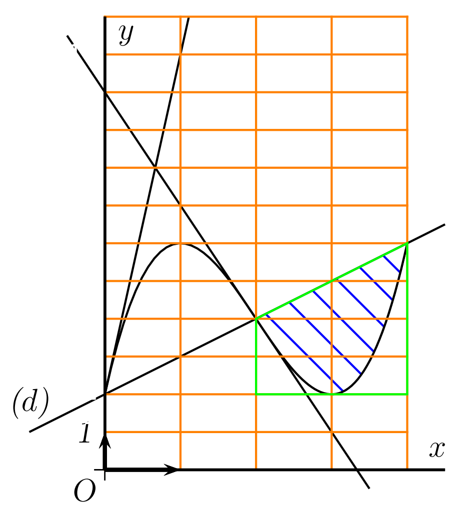
   (b) *$f(1)6$ et $f'(1) = 0$;*

   (c) *$f(2) = 4$ et $f'(2) = \dfrac{-3}{1} = -3$;*

   (d) *$f(x) \leqslant x + 2 \iff 2 \leqslant x \leqslant 4$.*

2. *La fonction f est croissante sur [0 ; 1] et sur [3 ; 4] et décroissante sur [1 ; 3].*

3.



On voit que la surface hachurée contient 1 unité d'aire. Son aire est inférieure au trapèze vert dont l'aire est égale à $\dfrac{(2+4)\times 2}{2} = 6$ L'aire est donc strictement comprise entre 1 et 6.

4. *On a* $f(x) = mx^3 + nx^2 + px + q$, *d'où* $f'(x) = 3mx^2 + 2nx + p$.

   (a) $f(0) = 2 \Rightarrow q = 2$;
   $f'(0) = 9 \Rightarrow p = 9$.

   (b) $f(1) = 6 \Rightarrow m + n + 9 + 2 = 6 \iff m + n = -5 \iff n = -5 - m$;
   $f'(1) = 0 \Rightarrow 3m + 2n + 9 = 0 \iff 3m + 2n = -9 \Rightarrow 3m + 2(-5 - m) = -9 \iff 3m - 10 - 2m = -9 \iff m = 1$, *puis* $n = -5 - m = -5 - 1 = -6$.
   Donc $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

5. *On a donc* $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$;

   $f'(0) = 9$ *et* $f'(4) = 3 \times 16 - 12 \times 4 + 9 = 48 - 48 + 9 = 9$: *les coefficients directeurs des tangentes sont égaux donc les tangentes sont parallèles.*