Exercice 1 (10 points)

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.

La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.

Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.

On note, pour tout entier naturel n *non nul :* A_n *l'évènement : la* n*-ième cible est atteinte ,* $\overline{A_n}$ *l'évènement : la* n*-ième cible n'est pas atteinte ,* a_n *la probabilité de l'évènement* A_n *et* b_n *la probabilité de l'évènement* $\overline{A_n}$.

1. *Donner* a_1 *et* b_1.

   Calculer a_2 *et* b_2*. On pourra utiliser un arbre pondéré.*

2. *Montrer que, pour tout* $n \geq 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,

   puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$

3. *Soit* (U_n) *la suite définie pour tout entier naturel* n *non nul, par* $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

   (a) *Montrer que la suite* (U_n) *est une suite géométrique.*
   On précisera la raison et le premier terme U_1.

   (b) *En déduire l'expression de* U_n *en fonction de* n*, puis l'expression de* a_n *en fonction de* n.

   (c) *Déterminer la limite de la suite* (a_n).

   (d) *Déterminer le plus petit entier naturel* n *tel que :* $a_n \geqslant 0{,}666\,5$.

Exercice 2 (10 points)

Partie A

On considère la fonction g *définie sur* $[0\ ;\ +\infty[$ *par*

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x - 1.$$

1. *Étudier les variations de la fonction* g.

2. *Déterminer le signe de* $g(x)$ *suivant les valeurs de* x.

3. *En déduire que pour tout* x *de* $[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f *définie sur [0 ; 1] par*

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

La courbe $(\mathcal{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée ci-dessous

On admet que f est strictement croissante sur [0 ; 1].

1. *Montrer que pour tout x de [0 ; 1], $f(x) \in [0\ ;\ 1]$.*
2. *Soit (D) la droite d'équation $y = x$.*
   (a) *Montrer que pour tout x de [0 ; 1], $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.*
   (b) *Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur [0 ; 1].*

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = f\left(u_n\right), \quad \text{pour tout entier naturel} n. \end{cases}$$

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.