Exercice 1 (10 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n+18$.

1. $u_1 = 0,8u_0 + 18 = 0,8 \times 65 + 18 = 52 + 18 = 70$ *et* $u_2 = 0,8u_1 + 18 = 0,8 \times 70 + 18 = 56 + 18 = 74$.

2. *Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$; donc $u_n = v_n + 90$.*

   (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0,8u_n + 18 - 90 = 0,8\,(v_n + 90) - 72 = 0,8v_n + 72 - 72 = 0,8v_n$
   $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$.
   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -25$.

   (b) *La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $v_0 = -25$ donc, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -25 \times 0,8^n$.*
   Or $u_n = v_n + 90$ donc, pour tout entier naturel n, $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.

3. *On considère l'algorithme ci-dessous :*

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	*Tant que .....*
ligne 4	$\quad n \leftarrow n + 1$
ligne 5	$\quad u \leftarrow 0,8 \times u + 18$
ligne 6	*Fin Tant que*

   (a) *Pour que l'algorithme détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 85$, il faut le faire tourner tant que u_n est strictement inférieur à 85; la ligne 3 est donc:*

ligne 3	*Tant que* $u < 85$

   (b) *En calculant à la calculatrice les termes successifs de la suite (u_n), on trouve (valeurs arrondies au dixième):*

0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
65	*70*	*74*	*77,2*	*79,8*	*81,8*	*83,4*	*84,8*	*85,8*

   La valeur de n à la fin de l'exécution de l'algorithme est donc 8.

4. *La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de souscrire un abonnement de 52 euros par mois qui permet de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement.*

   Les responsables de la société Biocagette font les hypothèses suivantes :

   - *d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;*
   - *chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.*

(a) *En juillet 2017, il y avait 65 particuliers qui avaient souscrit l'abonnement, ce qui correspond au terme de rang 0 de la suite* (u_n).

Chaque mois, 20 % des abonnements sont résiliés, donc il en reste 80 %.

Prendre 80 %, c'est multiplier par $0,8$*; il faudra donc multiplier par* $0,8$.

Comme 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement, il faudra ensuite ajouter 18.

On passe d'un mois n *au mois suivant* $n+1$ *en multipliant par* $0,8$ *puis en ajoutant 18 donc la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 65$ *et, pour tout* n*, par* $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$ *modélise le nombre d'abonnés au panier bio.*

(b) *Chaque abonnement coûte 52 euros par mois; le recette mensuelle le mois* n *est donc en euro de* $52u_n$.

On cherche donc n *pour que* $52u_n$ *dépasse 4 420 euros. On résout l'inéquation:*

$52u_n > 4\,420 \iff u_n > 85 \iff n \geqslant 8$ *(voir questions précédentes).*

La recette mensuelle dépassera 4 420 euros à partir de $n = 8$.

Sachant que $n = 0$ *correspond au mois de juillet 2017, c'est donc à partir de mars 2018 que la recette mensuelle dépassera 4 420 euros*

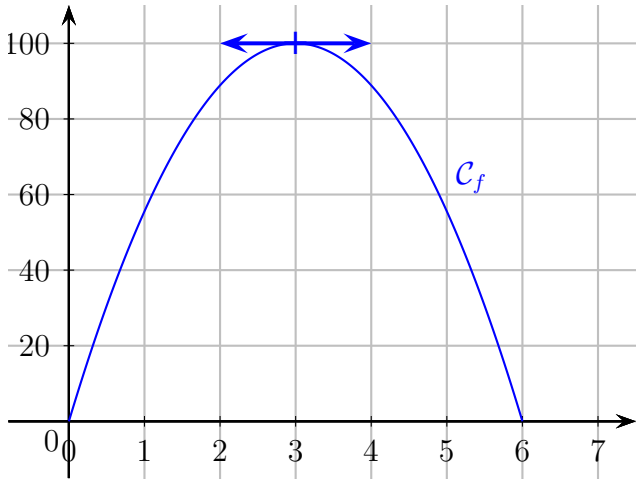
(c) *La suite* (v_n) *est géométrique de raison* $0,8$*; or* $0 < 0,8 < 1$ *donc la suite* (v_n) *est convergente et a pour limite 0.*

Pour tout n*,* $u_n = v_n + 90$ *donc la suite* (u_n) *a pour limite 90.*

La recette étant de $52u_n$ *pour le mois* n*, la recette mensuelle tend vers* $52 \times 90 = 4\,680$ *euros.*

Exercice 2 (10 points)

Partie A



1. *Il y a* saturation *au bout de 3 heures de travail.*
2. *Il y a* rejet *quand la fonction est décroissante, donc après 3 heures de travail.*

Partie B

1. *Pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,30]$:*
   $g'(x) = 12,5 \times e^{-0,125x+1} + 12,5x \times (-0,125)e^{-0,125x+1} = (12,5 - 1,562\,5x)e^{-0,125x+1}$.

2. *Pour tout x, $e^{-0,125x+1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $12,5 - 1,562\,5x$.*
   $12,5 - 1,562\,5x > 0 \iff 12,5 > 1,562\,5x \iff \dfrac{12,5}{1,562\,5} > x \iff x < 8$
   $g(0) = 0$, $g(8) = 100$ *et* $g(30) \approx 24$
   On établit le tableau des variations de la fonction g sur $[0\,;\,30]$:

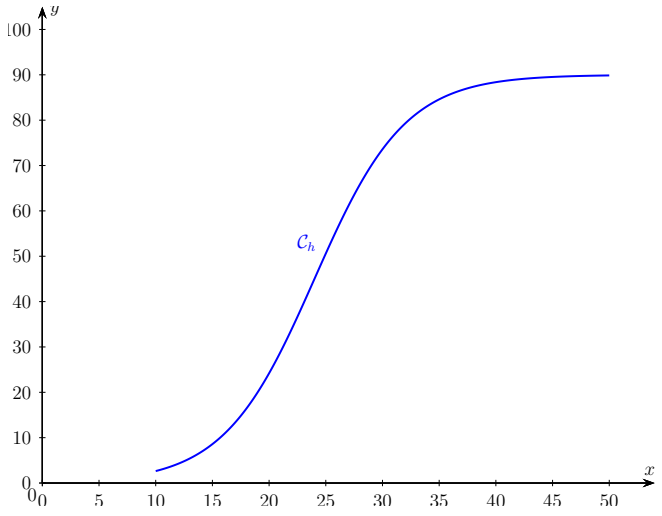
x	0		8		30
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	0	↗	100	↘	$f(30)$

3. *D'après le tableau de variations, l'effet* saturation *apparaît au bout d'un séjour de 8 jours.*

Partie C

La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction *h, est définie sur l'intervalle $[10\,;\,50]$ par $h(x) = \dfrac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$ (x est exprimé en millier d'euros).*

La courbe $\mathcal{C}_h$ de la fonction h est représentée ci-dessous:



1. $h'(x) = \dfrac{0,25 \times 90e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2} = \dfrac{22,5e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}$

2. $h'(x) > 0$ *donc la fonction* h *est croissante .*

3. *On résout dans l'intervalle* $[10\,;\,50]$ *l'inéquation* $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$*:*

$$\begin{aligned} e^{-0,25x+6} - 1 > 0 &\iff e^{-0,25x+6} > 1 \iff -0,25x + 6 > 0 \\ &\iff 6 > 0,25x \iff \frac{6}{0,25} > x \\ &\iff 24 > x \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[10\,;\,50]$*, l'inéquation* $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$ *a pour solution l'intervalle* $[10\,;\,24[$.

4. *La fonction* envie *décroit quand* h' *décroit donc quand* h'' *devient négative, soit à partir de* $x = 24$*, ce qui correspond à un salaire annuel de* $24\,000$ *euros.*