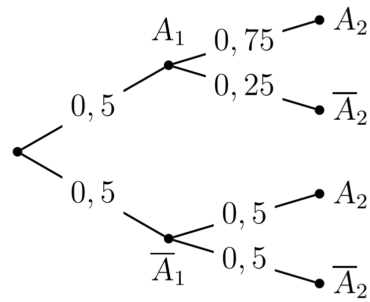
DS 7 spécialité maths première 12 mars 2026

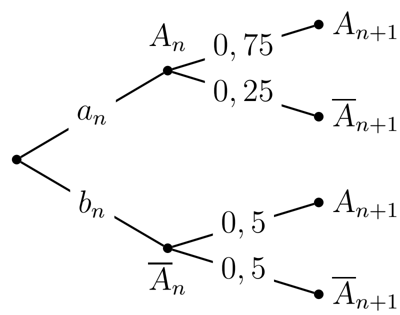
Exercice 1 (10 points)

1. $a_1 = \frac{1}{2}$ *et* $b_1 = 1 - a_1 = \frac{1}{2}$



Avec la formule des probabilités totales : $p(A_2) = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap \overline{A_1})$ *donc* $a_2 = a_1 \times \frac{3}{4} + b_1 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ *et* $b_2 = 1 - a_2 = \frac{3}{8}$

2. *On refait un arbre et on utilise encore la formule des probabilités totales :*



$$a_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(1 - a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$$

3. *Soit* (U_n) *la suite définie pour tout entier naturel* n *non nul, par* $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

   (a) $U_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}a_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}U_n$.

   Par définition, (U_n) *est donc géométrique de raison* $\frac{1}{4}$ *et de premier terme* $U_1 = -\frac{1}{6}$.

   (b) *On en déduit* $U_n = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ *puis* $a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   (c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ *est le terme général d'une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre* -1 *et* 1*, elle converge donc vers 0. On en déduit que* (a_n) *converge vers* $\frac{2}{3}$.

(d) *par calculatrice : Le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}666\,5$ est 6.*

Exercice 2 (10 points)
Partie A

1. *g somme de fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :*

   $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

   $g'(0) = 0$ et pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $g'(x) \geqslant 0$ par stricte croissance de la fonction exponentielle ($x > 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 > 1$).

   Conclusion : $g'(x) \geqslant 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, la dérivée ne s'annulant qu'en 0 donc la fonction g est strictement croissante sur cet intervalle.

2. *On a $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$.*

   La fonction étant strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, on a, quel que soit x, $g(x) \geqslant g(0)$, donc $g(x) \geqslant 0$.

3. *On vient de démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,*

   $g(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x \geqslant 1$.

Partie B

1. *On a $f(0) = \dfrac{1-1}{1} = 0$ et $f(1) = \dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1} = 1$.*

   Comme la fonction f est croissante sur [0 ; 1], $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow$

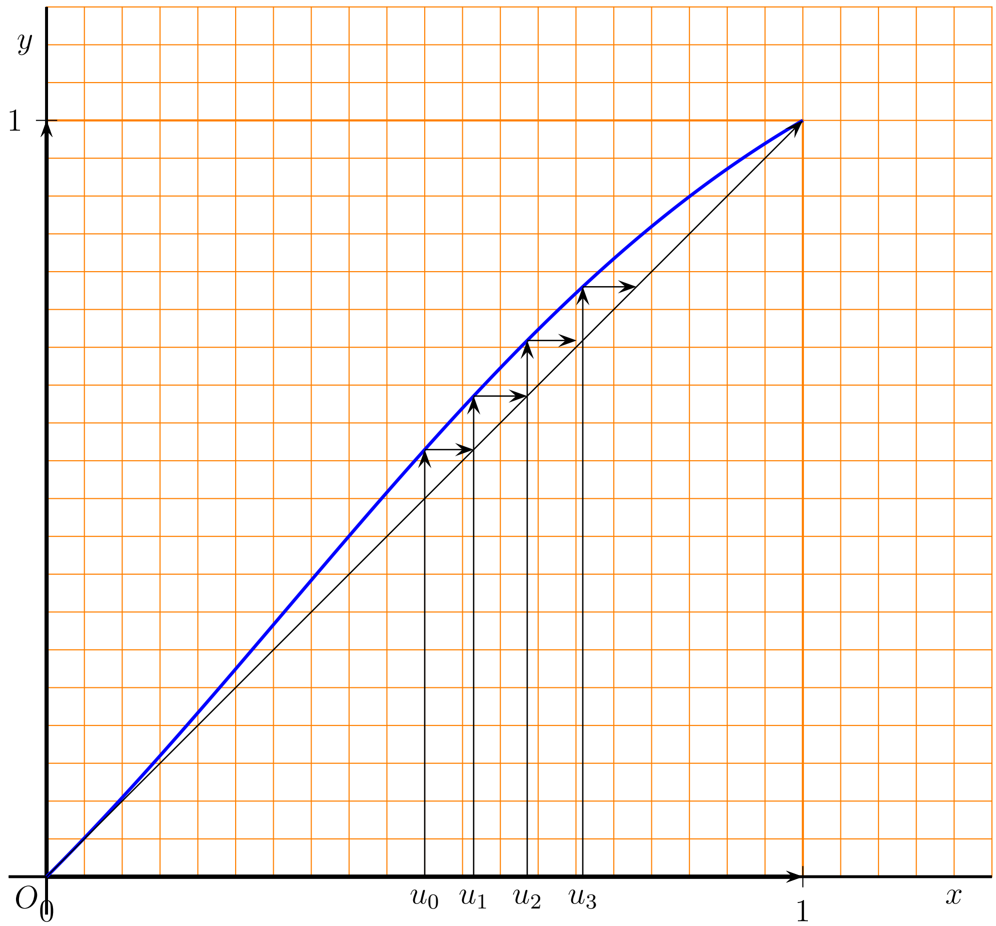
   $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \iff 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

2. (a) $f(x) - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x} - x = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x + x^2}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + x^2 - 1}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) + (x+1)(x-1)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x) - (x+1)(1-x)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)\left(\mathrm{e}^x - x - 1\right)}{\mathrm{e}^x - x} = \dfrac{(1-x)g(x)}{\mathrm{e}^x - x}$.

   (b) *La position relative de la droite (D) et de la courbe $(\mathcal{C})$ sur [0 ; 1] est donnée par le signe de la différence précédente : $f(x) - x$. Or on a vu sur [0 ; 1], $g(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$. Comme de plus $1 - x > 0$, tous les termes du quotient sont positifs, donc $f(x) - x \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $(\mathcal{C})$ est au dessus de la droite (D).*

3.

Partie C


y
1
O
0
u_0
u_1
u_2
u_3
1
x