

*Astuce*

On cherche d'abord la dérivée , puis son signe . Si la dérivée est positive , la fonction est croissante , sinon la fonction est décroissante . On répond sous forme de tableau de variations complet .

Étudier les variations des fonctions

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

11. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

2. $f(x) = x^3 - 3x$

12. $f(x) = \frac{x}{x+1}$

3. $f(x) = \frac{1}{x}$

13. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

4. $f(x) = x^2 + 2x$

14. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

5. $f(x) = x^3 - 6x^2$

15. $f(x) = x^2 + 1$

6. $f(x) = \sqrt{x}$

16. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

7. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

17. $f(x) = x^3 - x^2$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

18. $f(x) = \sqrt{x+4}$

9. $f(x) = x^3 + 3x^2$

19. $f(x) = x^2 - 8x + 10$

10. $f(x) = \sqrt{x+1}$

20. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

Corrigé

Exercice 1

On considère $f(x) = x^2 - 4x + 1$ définie sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = 2x - 4$$

On résout $f'(x) = 0$:

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Le coefficient directeur est positif, donc $f'(x)$ est négatif pour $x < 2$ et positif pour $x > 2$.

La fonction est donc décroissante sur $] -\infty, 2]$ puis croissante sur $[2, +\infty[$.

$$f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$$

La fonction admet un minimum égal à -3 en $x = 2$.

Exercice 2

On considère $f(x) = x^3 - 3x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$$

Les racines sont -1 et 1 .

Le signe de $f'(x)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles.

La fonction est croissante sur $] -\infty, -1]$, décroissante sur $[-1, 1]$, puis croissante sur $[1, +\infty[$.

$$f(-1) = 2 \quad \text{et} \quad f(1) = -2$$

Exercice 3

On considère $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.

La fonction est strictement décroissante sur $] - \infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

Réponses des exercices suivants

4. minimum en $x = -1$, décroissante sur $] - \infty, -1]$, croissante sur $[-1, +\infty[$
5. maximum en $x = 0$, minimum en $x = 4$, croissante sur $] - \infty, 0]$, décroissante sur $[0, 4]$, croissante sur $[4, +\infty[$
6. croissante sur $[0, +\infty[$
7. minimum en $x = 3$, décroissante sur $] - \infty, 3]$, croissante sur $[3, +\infty[$
8. croissante sur $] - \infty, 0[$, décroissante sur $]0, +\infty[$
9. maximum en $x = -2$, minimum en $x = 0$, croissante sur $] - \infty, -2]$, décroissante sur $[-2, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$
10. croissante sur $] - 1, +\infty[$
11. minimum en $x = 1$, décroissante sur $] - \infty, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$
12. croissante sur $] - \infty, -1[$ et $] - 1, +\infty[$
13. maximum en $x = -1$, minimum en $x = 1$, croissante puis décroissante puis croissante
14. croissante sur $] - \frac{1}{2}, +\infty[$
15. minimum en $x = 0$, décroissante sur $] - \infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$
16. décroissante sur $] - \infty, -2[$ et $] - 2, +\infty[$
17. maximum en $x = 0$, minimum en $x = \frac{2}{3}$, croissante, décroissante puis croissante
18. croissante sur $] - 4, +\infty[$
19. minimum en $x = 4$, décroissante sur $] - \infty, 4]$, croissante sur $[4, +\infty[$
20. décroissante sur $] - \infty, 1[$ et $]1, +\infty[$