Exercice 1

Partie A :
Soit $EFGH$ un rectangle tel que $EF = 6$ et $FG = 9$.
On place les points L et K définis par :

$$\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FG} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$$

1. En écrivant que $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK}$ et $\overrightarrow{HL} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GL}$, calculer et simplifier le produit scalaire :
$$\overrightarrow{EK} \cdot \overrightarrow{HL}.$$
2. Que peut-on alors affirmer concernant les droites (EK) et (HL) ? Justifier.

Partie B :
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1;0)$, $B(4;1)$ et $C(2;5)$.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. En calculant ce produit scalaire autrement, déterminer la valeur exacte de $\cos(\widehat{ABC})$.
4. En déduire, au degré près, une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
5. Tracer le point C', pied de la hauteur issue de C sur (AB). Calculer d'une autre manière le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire la valeur exacte de BC'.
6. Montrer que $CC' = \dfrac{7\sqrt{10}}{5}$.
7. En déduire l'aire du triangle ABC.

Exercice 2

Partie A :
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 6$ et $AC = 8$.
On place :
— M sur $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,
— N sur $[AC]$ tel que $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

1. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Partie B :
Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(0;0)$, $B(6;0)$ et $C(2;8)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Calculer les longueurs AB et AC.
3. En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$.
4. Soit H le pied de la hauteur issue de C sur (AB).
5. Exprimer l'aire du triangle ABC de deux façons différentes.
6. En déduire la longueur CH.