142

L'énoncé A est seulement calculatoire, l'énoncé B nécessite une écriture littérale et l'énoncé C est une démonstration non guidée.

Énoncé A

1. a) $A^2 = 450 \quad B^2 = 360$

b) $A^2 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

$B^2 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Donc $\frac{A}{B} = \sqrt{\frac{5}{4}}$.

2. $15\sqrt{2}$

Énoncé B

1. $-21\sqrt{6} + 30\sqrt{2}$

2. Soit k et k' des entiers.

Le produit d'un multiple de A^2 et d'un multiple de C^2 est :

$450 \times k \times 294 \times k'$

$= 2 \times 3^2 \times 5^2 \times k \times 2 \times 3 \times 7^2 \times k'$

$= 6 \times 75k \times 6 \times 49k'$

$= 36 \times (75 \times 49kk')$

C'est bien un multiple de 36 car $75 \times 49kk' \in \mathbb{N}$.

Énoncé C

Supposons que $\sqrt{450} + \frac{5}{7}$ est rationnel alors il existe des entiers p et q tels que

$\sqrt{450} + \frac{5}{7} = \frac{p}{q}$

On a alors $15\sqrt{2} = \frac{p}{q} - \frac{5}{7} = \frac{7p - 5q}{7q}$.

D'où $\sqrt{2} = \frac{7p - 5q}{105q}$

Donc on aboutit à une absurdité car on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel et donc il ne peut pas s'écrire sous la forme d'un quotient.

On en déduit que notre supposition est fausse, donc $\sqrt{450} + \frac{5}{7}$ est irrationnel.

144 Racines

$A = 6 + 2\sqrt{5}$

$B = -10\sqrt{7} + 140$

$C = 18 + 42\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 28 = -10 + 36\sqrt{2}$

$D = -36\sqrt{11} + 27 \times 11 + 48 - 36\sqrt{11} = 345 - 72\sqrt{11}$

155 Écritures exactes et simplifiées

Attention : le titre de l'exercice sera remplacé par celui ci-dessus.

1. $166 - 66\sqrt{5} > 0 \Leftrightarrow \frac{166}{6} > \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{83}{33} > \sqrt{5} > 0$

$\Leftrightarrow 83^2 > 5 \times 33^2$ ce qui est vrai car

$83^2 > 6400 > 5 \times 1089$ donc N existe.

2.a) $M^2 = 166 + 66\sqrt{5}$ et $N^2 = 166 - 66\sqrt{5}$

$M \times N = \sqrt{166^2 - 66^2 \times 5}$

b)

$(M+N)^2 = M^2 + 2MN + N^2$

$= 332 + 2\sqrt{166^2 - 66^2 \times 5} > 0$

Donc $M+N = \sqrt{332 + 2\sqrt{166^2 - 66^2 \times 5}}$

3. a) $\left(11 + 3\sqrt{5}\right)^2 = 121 + 66\sqrt{5} + 45$

$= 166 + 66\sqrt{5}$

donc $M = 11 + 3\sqrt{5}$

b) $\left(11 - 3\sqrt{5}\right)^2 = 121 - 66\sqrt{5} + 45 = 166 - 66\sqrt{5}$

donc $N = 11 - 3\sqrt{5}$

c) $M + N = 22$