

L'USAGE DE LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉ

Exercice 1 (6 points)

Soit $f(x) = (x - 7)^2 - 25$

1. Développer $f(x) = x^2 - 14x + 24$

2. Factoriser $f(x) = (x - 12)(x - 2)$

3. Résoudre : $f(x) \leq 0$

A l'aide d'un tableau de signes : $x \in [2; 12]$

4. Résoudre : $\frac{f(x)}{2x-1} \leq x-12 \iff \frac{(x-12)(x-2)}{(2x-1)} \leq x-12 \iff \frac{(x-12)(x-2) - (x-12)(2x-1)}{2x-1}$
 $0 \iff \frac{(x-12)(-x-1)}{2x-1} \leq 0$

A l'aide d'un tableau de signes , on obtient : $x \in [-1; \frac{1}{2}] \cup [12; +\infty[$

Exercice 2 (7 points)

Dans un repère orthonormé , on donne les points $A(-7;4)$, $B(12;8)$ et $C(-14;-12)$

1. Déterminer par le calcul les coordonnées de D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

D'où : $19 = -14 - x \iff x = -33$ et $4 = -12 - y \iff y = -16$ donc $D(-33;-16)$

2. Déterminer par le calcul une équation de la droite (AC)

Soit $M(x;y)$ un point de (AC) alors $\overrightarrow{AC}(-7; -16)$ et $\overrightarrow{AM}(x+7; y-4)$ sont colinéaires donc :

$-7(y-4) - (-16)(x+7) = 0 \iff 16x - 7y + 140 = 0$

3. Déterminer par le calcul une équation de la droite d parallèle à (AC) passant par B

La droite d et la droite (AC) ont le même coefficient directeur et donc l'équation de d est de la forme : $16x - 7y + c = 0$

B appartient à d donc : $16 \times 12 - 7 \times 8 + c = 0 \iff c = -192 + 56 = -136$ donc :
une équation de d est $16x - 7y - 136 = 0$

4. Déterminer par le calcul les coordonnées du point E intersection de la droite (AC) et de la droite d'équation $y = 6$

On doit résoudre : $16x - 42 - 136 = 0 \iff 16x = 178 \iff x = \frac{178}{16} = \frac{89}{8}$

Exercice 3 (7 points)

Dans un parc, on aménage un bassin de 24 mètres de longueur et 16 mètres de largeur

On souhaite construire tout autour du bassin une allée de largeur uniforme x mètres.

On note x un nombre réel strictement positif.

1. (a) A quel intervalle appartient x ? Justifier

$$x \in]0; +\infty[$$

- (b) Exprimer les dimensions du bassin **avec l'allée** en fonction de x .

$$\text{Longueur} = 24 + 2x$$

$$\text{Largeur} = 16 + 2x$$

- (c) Montrer que l'aire de l'allée peut s'écrire :

$$A(x) = 4x^2 + 80x.$$

$$A(x) = 2 \times (24 + 2x)x + 2 \times (16 + 2x) - 4x^2 = 80x + 8x^2 - 4x^2 = 4x^2 + 80x$$

2. On souhaite que l'aire de l'allée soit **au moins égale à** l'aire du bassin.

- (a) Calculer l'aire du bassin.

$$24 \times 16 = 384$$

- (b) Traduire la condition par une inéquation.

$$4x^2 + 80x \geq 384$$

- (c) Montrer qu'elle est équivalente à :

$$4x^2 + 80x - 384 \geq 0.$$

3. (a) Montrer que $4x^2 + 80x - 384 = (4x - 16)(x + 24)$

$$(4x - 16)(x + 24) = 4x^2 - 16x + 96x - 384 = 4x^2 + 80x - 384$$

- (b) Résoudre :

$$4x^2 + 80x - 384 \geq 0.$$

.

Avec un tableau de signes , on obtient $x \in]-\infty; -24] \cup [4; +\infty[$

- (c) Conclure.

Il faut que l'allée ait une largeur supérieure ou égale à 4 m