



A retenir

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 : x &\leq x^2 \\ \forall x \in [0; 1] : x^2 &\leq x \end{aligned}$$

Le principe

On va utiliser les tableaux de signes



Logique

| Pour montrer que $A \leq B$, on peut montrer que $A - B \leq 0$

La démonstration

Mise en forme

On va montrer que $\forall x \geq 1 : x \leq x^2$ et $\forall x \in [0; 1] : x^2 \leq x$
 Posons $f(x) = x^2 - x$, nous allons étudier le signe de f .
 $f(x) = x(x - 1)$.

Dressons un tableau de signes

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x		-	0	+
$x - 1$		-	-	0
f(x)		+	0	-

On obtient en lisant le tableau, $f(x) \geq 0$ sur $] - \infty; 0] \cup [1; +\infty[$ et $f(x) \leq 0$ sur $[0; 1]$

Conclusion

$f(x) \geq 0$ revient à $x^2 - x \geq 0 \iff x^2 - x + x \geq 0 + x \iff x^2 \geq x$
 Ce qui donne bien $\forall x \geq 1 : x \leq x^2$ et $\forall x \in [0; 1] : x^2 \leq x$